Tentamen i Diskret Matematik, TMV200, 11:e april 2017

Svar eller kortfattade lösningar

1. Argumentet är ogiltigt. Exempel: p falskt, q och r sanna.

2. $2581 = 2059 + 522; 2059 = 3 \cdot 522 + 493; 522 = 493 + 29$ och $493 = 17 \cdot 29$
   Så största gemensamma delare är 29.

3. Koefficienten är $= -2^7 \binom{12}{5}$ som blir $= -101376$

4. $h(a) = h(b) \implies f\big(g(a)\big) = f\big(g(b)\big) \implies g(a) = g(b) \implies a = b$
   Så h är injektiv (vi använder att först f, sedan g är injektiva)

   Om $k \in A$ finns x med $f(x) = k$ och y med $g(y) = x$, alltså $h(y) = k$.
   Så k är surjektiv (vi använder att f och g är surjektiva).

   Svar: ja, h är bijektiv.

5. Vi noterar först att det i en sådan graf finns maximalt 6 kanter.

   a. Ett träd med 4 noder har 3 kanter och är sammanhängande utan cykler. Det finns $\binom{6}{3} = 20$ grafer med 3 kanter varav 4 består av en cykel. Alltså 16 träd.

   b. Förutom träden är alla grafer med 4 eller fler kanter sammanhängande.
   Alltså $16 + \binom{6}{4} + 6 + 1 = 38$ sammanhängande grafer.

6. Allmänt gäller att om ett tal n är sammansatt har n en primtalsdelare som är $\leq \sqrt{n}$.
   Så om $T = S_A + S_{A^c}$ är $< (p_{n+1})^2$ och sammansatt är T delbart med något av primtalen i M.

   Men det är omöjligt eftersom för varje p_i med $i \leq n$ är den ena termen i T delbar med p_i men inte den andra.

7. Eftersom a+b = a+b är R reflexiv och eftersom $a + d = b + c \iff b + c = a + d$ är R symmetrisk.

   För att visa att R även är transitiv antar vi att $(a, b)R(c, d)$ och $(c, d)R(e, f)$.
   Då gäller: $\begin{cases} a + d = b + c \\ c + f = d + e \end{cases}$ Genom att summera ledvis får vi $a + f = e + b$, det vill säga $(a, b)R(e, f)$
   Så ja, R är en ekvivalensrelation.

8. Påståendet är uppenbarligen sant för n=2.

   Antag att det är sant för n=k och betrakta ett nätverk med k+1 städer. Välj en godtycklig som vi kallar T. Enligt induktionsantagandet finns det en stad S bland de övriga k städerna som uppfyller villkoret för n=k.
   Om det finns en väg från T till S uppfyller S villkoret även för de k+1 städerna och påståendet gäller för n = k+1.
   Antag alltså att det går en väg från S till T. Låt A vara mängden av alla städer med en väg till S och B mängden av alla städer med vägar från S. Enligt induktionsantagandet finns det från varje stad i B en väg till minst en stad i A.
   Om det finns en väg från T till någon av städerna i A uppfyller även då S villkoret för n = k+1 städer.
   Annars går alla vägar från städerna i A till T och då uppfyller i stället T villkoret för n = k+1.
   Alltså är påståendet sant för alla n > 1.