TMV200, Diskret Matematik

Svar eller lösningar till tentamen 13/1 2017

1. SANT, SANT, FALSKT, SANT

2. 13 är primtal så vi använder att $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ som gäller om $sgd(a,p) = 1$. Så eftersom $2017 \equiv 1\ (mod\ 12)$ blir $9^{2017} \equiv 9^1 = 9\ (mod\ 13)$

3.
   a. $\binom{8}{5} = 56$

   b. $\binom{8}{3}\binom{4}{2} = 336$

   c. $\binom{12}{5} - \binom{8}{5} = 736$

4. Antag att grafen har n noder (n är förstås ≥ 2). Om alla noder har olika gradtal måste dessa gradtal vara $= 0, 1, 2, \dots, n-1$. Men om en nod har gradtal n-1 finns det en kant till varje annan nod och då kan det inte finnas en nod med gradtal 0.

5.
   a. Nej, till exempel är $f(\{1{,}2\}) = f(\{1\})$

   b. Ja, eftersom $f(\{i\}) = i$ för varje $i, i = 1, 2, \dots, n$ och $f(\emptyset) = 0$

6. Vi söker $x + y$ där $17x + 13y = 1000$ och både *x* och *y* är heltal ≥ 0.
   Eftersom $17 \cdot (-3) + 13 \cdot 4 = 1$ får vi alla lösningar som $\begin{cases} x = 13n - 3000 \\ y = 4000 - 17n \end{cases}$ och eftersom bägge variabler är icke-negativa blir $\frac{3000}{13} < n < \frac{4000}{17}$, så att $230 < n < 236$.

   Svar: antalet personer kan vara 60, 64, 68, 72 eller 76.

7. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ så R är inte reflexiv
$A \cap B = B \cap A$ så R är symmetrisk.
Om till exempel $A = \{x\}, B = \{x, y\}$ är ARB och BRA men $A \neq B$ så R är inte antisymmetrisk.
Om A och B är som ovan och $C = \{y\}$ gäller ARB och BRC men A och C är inte relaterade; så R är inte transitiv.

Svar: R är symmetrisk men inget annat.

8. Varje gång satsen a=a+1 exekveras gäller att $i \leq j \leq k \leq n$ och omvänt. Vi skall alltså beräkna antalet sådana tripplar *i, j, k*. Men varje sådan trippel kan illustreras av en rad med tre kryss och n-1 staplar.

($||x|xx|||||\ \ visar\ \ n = 10, i = 3, j = k = 4$)

Alltså finns $\binom{n+2}{3}$ tripplar som också är värdet på a.

9. Låt $P(n)$ vara påståendet att det bland 2n gäster inte blir fler än n^2 handskakningar.
Man ser lätt att $P(1)$ är sant.
För att visa $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, välj från en tillställning med $2n + 2$ gäster ut två, säg a och b, som skakade hand med varandra. (Om inte det är möjligt blir antalet handskakningar 0).
Enligt induktionsantagandet har vi bland de övriga 2n gästerna högst n^2 handskakningar. Och eftersom a och b skakade hand med varandra finns det ingen gäst bland dessa 2n som skakade hand med både a och b. Alltså finns det högst 2n handskakningar mellan å ena sidan a och b, å andra sidan de 2n gästerna. I hela sällskapet med $2n + 2$ gäster förekom alltså högst $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ handskakningar.