

Diskret matematik, TMV200

Läsperiod 2, 2016

Trevliga uppgifter om induktion, rekursion, delbarhet och diofantiska ekvationer inför den andra duggan

1. I en schackturnering med n deltagare spelade alla mot alla. Remi förekom inte. Visa att man kan sortera deltagarna som T_1, T_2, \dots, T_n på ett sådant sätt att T_i besegrade T_{i+1} för alla $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

2. Bestäm nästa element i följden 2, 12, 360, 75600, 174636000.

3. Låt M vara en funktion från Z^+ till Z sådan att

$$M(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{om } n > 100 \\ M(M(n + 11)) & \text{om } n \leq 100 \end{cases}$$

Visa att $M(n) = 91$ för alla n , $1 \leq n \leq 100$

4. Denna uppgift handlar om vad vi kan kalla "stapelspelet".
Vi börjar med en stapel av n block. Stapeln delas i två mindre vilket resulterar i poäng lika med produkten av antalet block i de två staplarna. Därefter, och i varje följande drag, väljer man någon av staplarna och delar dem i två mindre, och får poäng lika med produkten av antalet i de två nya staplar som har bildats.
När alla staplar består av ett enda block summerar man poängen.
Visa att man för varje n oavsett dragföljd får samma slutpoäng.

5. Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} < \frac{n^2}{n+1}$ för alla $n \geq 2$

6. Antag att Riksbanken i ett ögonblick av inspiration ersätter alla mynt med 5- och 7-kronor. Vilka belopp kan man betala med sådana mynt om vi förutsätter att säljaren
- a. inte ger tillbaks någon växel?
 - b. har tillgång till obegränsat med växelmynt?

7. Herr och fru Host har en bjudning för n st par. När paren anländer skakar de hand med en del av dem som redan har kommit och eventuellt också värdparet. När alla är på plats roar sig herr Host med att fråga gästerna, och även sin fru, hur många de har skakat hand med. Det visar sig då att han får olika svar från var och en. Hur många gäster skakade fru Host hand med?

Vi antar att ingen skakar hand med sin respektive eller sig själv.

8. Låt b och n vara positiva heltal. Hur många av talen $n, 2n, 3n, \dots, bn$ är delbara med b ?

9. Visa att summan av två primtalstvillingar (där bägge är >3) är delbar med 12.

10. Vi vill koka ett ägg i exakt tre minuter men har bara tillgång till två äggklockor som ringer efter 11 respektive 5 minuter. Hur skall vi gå tillväga?