Mårten Wadenbäck

Logik (satslogik)

Utsagor (påståenden) är yttranden som i det givna sammanhanget har ett sanningsvärde (sant/falskt).

Exempel på utsagor:

A: Vargen åt alla wienerbröden.

B: Slaget vid Crécy utkämpades den 26 augusti 1346.

Däremot inte:

C: Choklad är gott.

D: Vem vill bli miljonär?

E: Detta påstående är falskt.

G: Skynda dig!

Notation: Vi betecknar "sant" med S (eller T) och "falskt" med F.

Anmärkning: Utsagan och dess sanningsvärde är olika saker, men ofta tillåter vi oss att slarva om det inte råder risk för missförstånd.

Utsagor kan kombineras för att bilda nya utsagor:

- konjunktion ("och"): $P \wedge Q$ är sann precis då både P och Q är sanna.
- disjunktion ("eller"): $P \vee Q$ är sann precis då minst en av P och Q är sann.

Vi har även negation ("icke"): $\neg P$ är sann precis då P är falsk.

Sanningstabell:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$
F	F	F	F	S	S
F	S	F	S	S	F
S	F	F	S	F	S
S	S	S	S	F	F

Anmärkning: Med N utsagor $(P_1, \ldots, P_N)$ blir det 2^N rader i sanningstabellen. Klumpigt då $N \geq 4$.

Implikation ("medför"): $P \rightarrow Q$ ges av sanningstabellen

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

Utläses även "om P så Q". Tänk igenom första och andra raden!

Anmärkning: Om vi vet att $p = S$ och $q = F$ inte samtidigt kan inträffa har vi logisk implikation, $P \Rightarrow Q$.

Exempel: Om

$$P: \; xy = 0$$
$$Q: \; x = 0$$

kan vi skriva $P \rightarrow Q$ (som är falsk) men inte $P \Rightarrow Q$. Däremot gäller $Q \Rightarrow P$ eftersom $Q \rightarrow P$ är sann. Även $P \not\Rightarrow Q$ går bra, men inte $P \Rightarrow \neg Q$.

Ekvivalens: $P \leftrightarrow Q$ definieras som $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, och betyder "$P$ och Q har samma sanningsvärde". Utläses även "Q om och endast om P", eller "Q precis då P".

Om P och Q är sådana att utsagan $P \leftrightarrow Q$ inte kan vara falsk råder logisk ekvivalens, $P \Leftrightarrow Q$.

Exempel: Vi betraktar ekvivalensen $\neg(P \vee Q) \longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$.

Utsagorna $\neg(P \vee Q)$ och $\neg P \wedge \neg Q$ har samma sanningstabell:

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
F	F	S	S
F	S	F	F
S	F	F	F
S	S	F	F

Alltså råder logisk ekvivalens, $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$.

En utsaga som alltid är sann kallas för en tautologi.

Exempel: $P \vee \neg P$ och $P \leftrightarrow P$ är tautologier.

Ett logiskt argument är en följd av utsagor, som vi kallar hypoteser eller förutsättningar, samt en slutsats (som är en utsaga).

Ett logiskt argument kan skrivas $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$, där $H_1, \ldots, H_n$ är hypoteserna och C är slutsatsen.

Logiska argument skrivs ofta på formen

$$\begin{array}{c} H_1 \\ \vdots \\ H_n \\ \hline C \end{array}$$

Ett logiskt argument är <u>giltigt</u> om slutsatsen automatiskt är sann då hypoteserna är sanna.

Exempel: Avgör hurvida följande argument är giltiga:

a) $$\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \to R \\ Q \to R \\ \hline R \end{array}$$

b) $$\begin{array}{c} P \\ Q \to P \\ \hline Q \end{array}$$

Vi kan använda <u>motsägelsebevis</u>, det vill säga vi antar att slutsatsen är falsk. I a) ger $r = F$ att $p = q = F$, men då kan inte $P \vee Q$ vara sann, alltså var antagandet $r = F$ fel, och argumentet är alltså giltigt. I b) gör $q = F$ och $P = S$ att hypoteserna är sanna medan slutsatsen är falsk. Argumentet är alltså inte giltigt.

Ett <u>predikat</u> är ett påstående som beror på en eller flera variabler. För givna värden på variablerna blir predikatet en logisk utsaga, vars sanningsvärde beror på variablerna (detta kallas att <u>specificera</u> variablerna).

Exempel: $P(x,y) : \; x+y > xy$

är ett predikat som beror på variablerna x och y. $P(1,1)$ är sann, medan $P(-2,0)$ är falsk.

Vi kan <u>kvantifiera</u> ett predikat för att bilda en logisk utsaga. Detta sker med <u>allkvantorn</u> $\forall$ eller med <u>existenskvantorn</u> $\exists$.

Anmärkning: Räckvidden för en kvantor är bara fram till närmsta predikat. Alltså är

$$\underbrace{\forall x : P(x)} \wedge Q(x)$$

ett predikat som beror på x, medan

$$\forall x : [P(x) \wedge Q(x)]$$

är en logisk utsaga.

Förekommer fler än en kvantor kan ordningen spela avgörande roll!

Exempel: Om $P(x,y)$: $y = x^2$ så gäller

$\forall x \exists y : P(x,y)$, medan $\exists y \forall x : P(x,y)$ är falskt.

Sats: Låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara predikat (med avseende på samma universum). Då gäller

$$\forall x : [P(x) \wedge Q(x)] \iff [\forall x : P(x)] \wedge [\forall x : Q(x)]$$

och

$$\exists x : [P(x) \vee Q(x)] \iff [\exists x : P(x)] \vee [\exists x : Q(x)].$$

Sats: För ett predikat $P(x)$ gäller

$$\neg [\forall x : P(x)] \iff \exists x : [\neg P(x)]$$

och

$$\neg [\exists x : P(x)] \iff \forall x : [\neg P(x)].$$