Mårten Wadenbäck

# Mängdlära

En mängd är en väldefinierad samling element. Vi betecknar ofta mängder med stora bokstäver och deras element med små.

Om $x$ är ett element i mängden $A$ skriver vi $x \in A$, i annat fall $x \notin A$.

Anmärkning: "Väldefinierad" ovan innebär precis att $x \in A$ är en logisk utsaga för varje givet $x$.

Anmärkning: $x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$.

Exempel: $A = \{3, \frac{12}{7}, \pi^2\}$

$B$ = mängden av skalbaggsarter

$C$ = mängden av udda heltal $=$

$= \{\pm 1, \pm 3, \ldots\}$

Några standardmängder:

$\emptyset = \{\ \} =$ tomma mängden

$\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\} =$ de naturliga talen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} =$ heltalen

$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\} =$ de positiva heltalen

$\mathbb{R} =$ de reella talen

Mängder definieras ofta av att elementen har en utmärkande egenskap.

Exempel: $A = \{x : x^2 \leq 5\}$

Anmärkning: Här måste vi förutsätta att vi endast betraktar $x$ som redan är element i ett visst <u>universum</u> (grundmängd) $U$. Universumet skall framgå av sammanhanget. För tydlighets skull kan man skriva

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 5\}$$

i exemplet ovan.

Fler standardmängder:

$\mathbb{Q}$ = de rationella talen =

$= \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$

$\mathbb{C}$ = de komplexa talen =

$= \left\{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1 \right\}$

Anmärkning: Ett element kan endast ingå en gång i mängden, oavsett om det listas fler gånger. Ordningen elementen listas i är också oväsentlig.

Exempel: $\{1, 2, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2\} = \ldots$

Definition: Låt A och B vara mängder. Då är A en <u>delmängd</u> av B precis då $x \in A \Rightarrow x \in B$ för alla x. Detta skrivs $A \subseteq B$.

Vi ser att $B \subseteq B$ alltid gäller. Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ säger vi att A är en <u>äkta</u> delmängd av B.

Sats: Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq C$ så är $A \subseteq C$.

Sats: Två mängder är lika precis då $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$.

Exempel: $\emptyset \subseteq A$ för varje mängd $A$, eftersom

$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ för alla $x$. Detta ser vi i följande sanningstabell:

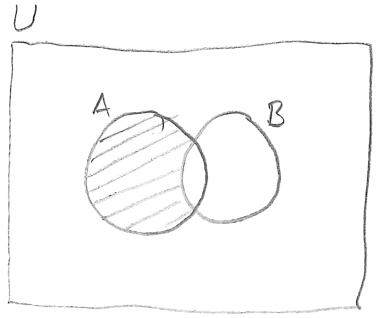
| $x \in \emptyset$ | $x \in A$ | $x \in \emptyset \to x \in A$ |
|---|---|---|
| F | F | S |
| F | S | S |
| S | F | F |
| S | S | S |

De två understa raderna kan inte inträffa, så $x \in \emptyset \to x \in A$ är en tautologi, och då gäller $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$.

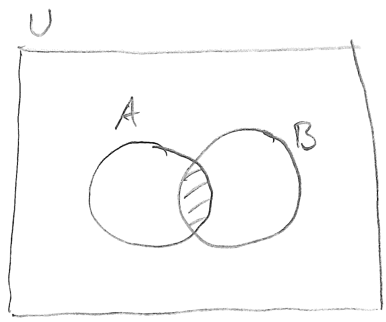
Nya mängder kan bildas ur gamla genom

- snittet: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- unionen: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- symmetrisk mängddifferens: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- komplement: $A^c = U \setminus A$

Dessa operationer illustreras ofta med Venndiagram, exempelvis




= $A \setminus B$




= $A \cap B$

Se tabellen på sida 45 för en lista med användbara identiteter! Vi hittar exempelvis första associativa lagen, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Denna bevisas enligt följande:

$$x \in (A \cup B) \cup C \iff (x \in A \cup B) \vee (x \in C) \iff$$
$$((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \iff$$
$$(x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)) \iff$$
$$(x \in A) \vee (x \in B \cup C) \iff x \in A \cup (B \cup C).$$

Vi kan alltså skriva $x \in A \cup B \cup C$.

De övriga räknelagarna i tabellen visas på liknande sätt.

Definition: <u>Produktmängden</u> (kartesiska produkten)

$A \times B$ är mängden av alla ordnade par $(x,y)$ där $x \in A$ och $y \in B$,

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Exempel: $\{H, R\} \times \{-2, 7\} = \{(H,-2), (H,7), (R,-2), (R,7)\}$.

Notation: $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ st}} = A^n$.

Definition: $P(A)$ är mängden av alla delmängder till mängden $A$.

Exempel: $P(\{7, M\}) = \{\emptyset, \{7\}, \{M\}, \{7, M\}\}$.

Notera att $7 \notin P(\{7, M\})$
men $\{7\} \in P(\{7, M\})$.

Antalet element i en ändlig mängd $A$ betecknas $|A|$. Om $A$ inte är ändlig skriver vi $|A| = \infty$.

Sats: Om $A$ är en mängd med $|A| = n$ så är $|P(A)| = 2^n$.