TMV200 Diskret matematik hösten 2017, föreläsning 3 (1.)

Mårten Wadenbäck

# Funktioner

Definition: En funktion $f$ från mängden $A$ till mängden $B$ är en regel som till varje $a \in A$ ordnar precis ett entydigt $b \in B$. $A$ kallas definitionsmängden och $B$ kallas målmängden.

Att $f$ är en funktion från $A$ till $B$ skrives

$f: A \to B$ (detta är inte en implikation).

Om $A$ framgår av sammanhanget kan man ibland istället ange själva regeln på formen $a \mapsto f(a)$

Exempel: $f(x) = x^4$ kan vara en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

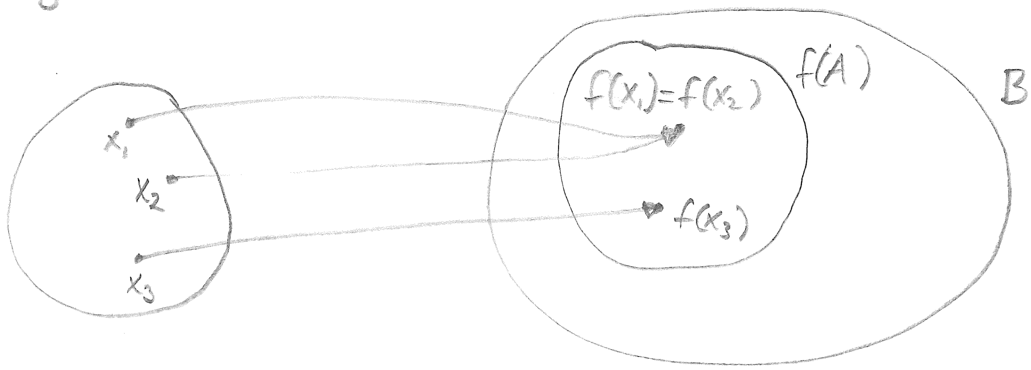
Anmärkning: Alla element i målmängden behöver inte antas. Notera att $f(x) = x^4 = (x^2)^2 \geq 0$ för alla $x$.

Anmärkning: $f(x) = x^4$, $\omega \mapsto \omega^4$, och $f(\beta) = \beta^4$ anger samma funktion.

Anmärkning: Ett element (eller värde) i målmängden kan antas för flera olika element i definitionsmängden:

$$f(-1)=(-1)^4=1 \quad \text{och} \quad f(1)=1^4=1.$$

Om $f:A\to B$ och $C\subseteq A$ så är <u>bilden av C</u> mängden $f(C)=\{f(x): x\in C\}$. *Notera* att $f(C)\subseteq B$. Värdemängden till $f$ är mängden $f(A)$. Illustration:



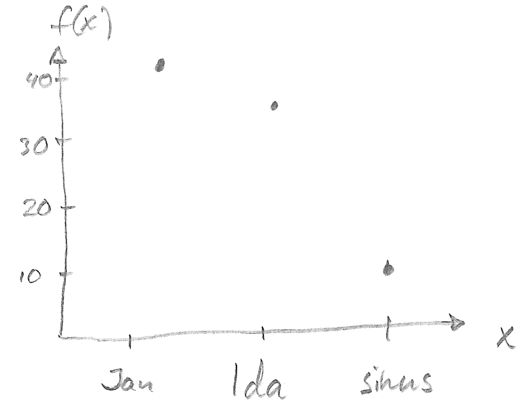

Definition: Två funktioner $f$ och $g$ är <u>lika</u> precis då de har samma definitionsmängd, samma målmängd, och $f(x)=g(x)$ för alla $x$ i definitionsmängden.

Anmärkning: Ofta tillåter vi oss att slarva, framförallt med kravet på samma målmängd.

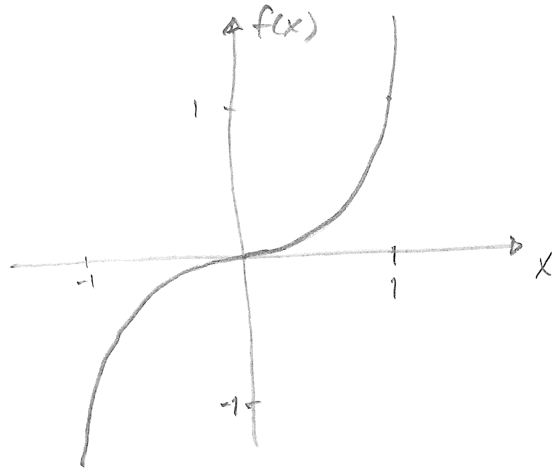
Definition: <u>Grafen</u> till en funktion $f:A\to B$ är mängden

$$\text{graf}(f)=\{(x,f(x)): x\in A\}\subseteq A\times B.$$

Exempel: Om $f$ har definitionsmängden $A = \{\text{Ida, Jan, Sinus}\}$ och $f$ anger åldern för vederbörande kan grafen se ut som i figuren

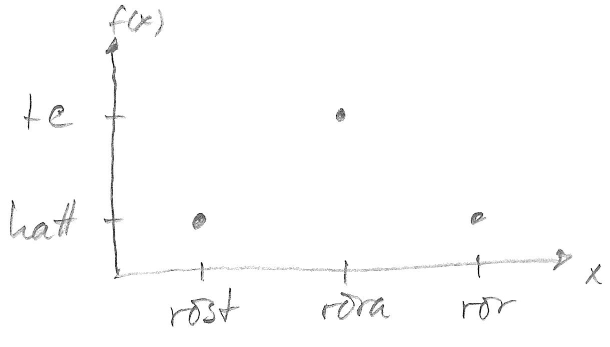



Exempel: Om $f(x) = x^3$ med definitionsmängd $\mathbb{R}$ blir grafen




Om $f: A \to B$ och $g: B \to C$ kan vi bilda <u>sammansättningen</u> $g \circ f: A \to C$ (observera ordningen!) som ges av $x \mapsto g(f(x))$ $\forall x \in A$.

Exempel: Låt $A = \{\text{häst, kast, myra}\}$, $B = \{\text{röst, röra, rör}\}$, och $C = \{\text{te, hatt}\}$. Låt $f$ vara funktionen som byter ut de två första bokstäverna till rö, och låt $g$ ges av grafen



Då blir $(g\circ f)(\text{häst}) = g(f(\text{häst})) = g(\text{röst}) = \text{katt}$. Vad blir $(g\circ f)(\text{hast})$ och $(g\circ f)(\text{myra})$?

Sats: Låt $f: A \to B$, $g: B \to C$, och $h: C \to D$ vara funktioner. Då är $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$, och parenteserna behövs alltså inte.

Bevis: $f$ och $g\circ f$ har samma definitionsmängd, och $h\circ g$ och $h$ har samma målmängd. Det återstår att se att $((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ(g\circ f))(x)$ för alla $x \in A$. Vi får

$$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(\underbrace{f(x)}_{y}) = h(g(y)) = h(\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)}) = (h\circ(g\circ f))(x).$$

Definition: En <u>unär operator</u> är en funktion $f: A \to A$. En <u>binär operator</u> är en funktion $f: A \times A \to A$.

Exempel: $f(x,y) = (x+1)^2(y-1)$ är en binär operator, då $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ och $f(x,y) \in \mathbb{R}$.

Exempel: Konjunktion, disjunktion, implikation, och ekvivalens är binära operatorer på mängden av utsagor.
Negation är en unär operator.

Notation: En binär operator skrivs ofta med någon sorts symbol mellan sina <u>operander</u> $a$ och $b$, exempelvis $a+b$.
En unär operator skrivs ofta med en symbol framför sin operand, exempelvis $\neg P$.

Definition: Låt $*$ vara en binär operator på $A$.

- Två element $a$ och $b$ kommuterar om $a*b=b*a$.
- Om $a*b=b*a$ för alla $a,b\in A$ kallas $*$ kommutativ.
- Om $a*(b*c)=(a*b)*c$ för alla $a,b,c\in A$ kallas $*$ associativ.
- Ett element $e\in A$ kallas identitet för $*$ om $e*a=a*e=a$ $\forall a\in A$.
- Om $e$ är identitet för $*$ och $a*b=b*a=e$ kallas $b$ invers till $a$.

Exempel: $\emptyset$ är identitet för unionen, eftersom $\emptyset\cup A=A\cup\emptyset=A$ för alla $A$. Eftersom $P\wedge Q$ har samma sanningsvärde som $Q\wedge P$ för alla utsagor $P$ och $Q$ är konjunktionen kommutativ. Eftersom $a+0=0+a=a$ är $0$ identitet för addition. Eftersom $a+(-a)=(-a)+a=0$ är $-a$ invers till $a$.

I allmänhet är $g\circ f\neq f\circ g$ (inte ens om båda är definierade), så sammansättning av funktioner är icke-kommutativ.

Sats: Låt $*$ vara en operator på en mängd $A$. Då har $*$ högst en identitet. Om $*$ dessutom är associativ finns det högst en invers till varje givet $a\in A$.

Bevis: Om både $e$ och $f$ är identiteter så måste $e=e*f=f$.

Om både $b$ och $c$ är inverser till $a$ måste

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c.$$

Exempel: Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x$ och $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ blir

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$$

och

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x).$$

Alltså är $f(x) = x$ identiteten för sammansättning av unära operatorer på $\mathbb{R}$.

Definition: Om $f: A \to A$ är en unär operator sådan att $f$ är sin egen invers är $f$ en involution.

Exempel: Negation är en involution, eftersom $\neg(\neg P) = P$.