Mårten Wadenbäck

Relationer

Funktionsbegreppet är ett sätt att para ihop element (eventuellt från olika mängder), men det är ganska restriktivt. Ett allmännare sätt är följande.

Definition: Låt A och B vara mängder. En relation R från A till B är en delmängd till den kartesiska produkten $A \times B$, dvs $R \subseteq A \times B$. Om $A = B$ säger vi att R är en relation på A.

Om $(x,y) \in R$ betyder det att x står i relation till y genom relationen R.

Notation: Om $(x,y) \in R$ skriver vi xRy.

Exempel: Vi påminner oss att grafen till en funktion var $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$.

Detta visar att en funktion $f: A \to B$ ger upphov till en relation där x är relaterat till y precis då $y = f(x)$.

Definition: En relation R på mängden A kallas

- reflexiv om xRx för alla $x \in A$.
- symmetrisk om $\forall x, y \in A: \ xRy \Rightarrow yRx$.
- antisymmetrisk om det för alla $x, y \in A$ gäller att

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y.$$

- transitiv om $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ gäller för alla $x, y, z \in A$.

Varning: Tro inte att symmetrisk och antisymmetrisk är motsatser! En relation kan besitta ingen, en, eller båda dessa egenskaper.

Exempel: Eftersom 1) $x = x$, 2) $x = y \Rightarrow y = x$, 3) $x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$, och 4) $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ är $=$ en reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, och transitiv relation (på vilken mängd som helst).

Exempel: Låt $A = \{\text{häst}, \text{saft}, \text{bäck}\}$ och låt

R vara relationen "har minst en gemensam bokstav. Relationen R kan illustreras:

$x \backslash y$	häst	saft	bäck
häst	x	x	x
saft	x	x	
bäck	x		x

Vi ser att R är reflexiv (diagonalen) och symmetrisk. R är inte antisymmetrisk (till exempel gäller häst R bäck $\wedge$ bäck R häst) och inte transitiv (saft R häst $\wedge$ häst R bäck gäller, men inte saft R bäck).

Definition: En relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv kallas för en <u>ekvivalensrelation</u>.

Exempel: Låt A vara mängden av biltillverkare och låt xRy precis då x och y lanserade sin senaste modell samma månad. Vi kan kontrollera att R är reflexiv, symmetrisk och transitiv, så R är en ekvivalensrelation.

Notation: Om R är en ekvivalensrelation på A och $x \in A$ låter vi $[x]$ beteckna mängden av alla $y \in A$ sådana att xRy, dvs

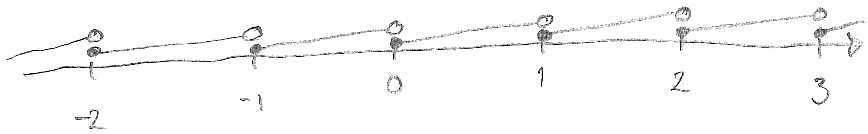
$$[x] = \{y \in A : xRy\}.$$

Mängden $[x]$ kallas ekvivalensklassen som innehåller x, och om $y \in [x]$ kallas y en representant för $[x]$.

Observera att $x \in [x]$, så unionen av alla $[x]$ för $x \in A$ blir precis hela A. Låt nu $x, y \in A$, då gäller antingen $[x] \cap [y] = \emptyset$ eller $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Vi skall visa att om $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ så är $[x] = [y]$. Om $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tag då $z \in [x] \cap [y]$. Eftersom $z \in [x]$ och $z \in [y]$ gäller xRz och yRz, och eftersom R är reflexiv gäller även zRy och zRx. För varje $w \in [x]$ gäller nu att $wRx \Rightarrow wRz \Rightarrow wRy \Rightarrow w \in [y]$, så vi ser att $[x] \subseteq [y]$. På motsvarande sätt får vi $[y] \subseteq [x]$, och alltså $[x] = [y]$.

Sammanfattningsvis har vi visat att en ekvivalensrelation delar in en mängd i disjunkta delmängder (ekvivalensklasserna) vars union är hela mängden. En sådan indelning kallas för en partition. Varje ekvivalensrelation på A svarar mot precis en partition av A, och omvänt.

Exempel: Om R är relationen "avrundas nedåt till samma heltal" ser vi att R ger upphov till en partition av $\mathbb{R}$:



Alltså är R en ekvivalensrelation (vi slapp kontrollera reflexivitet, symmetri, och transitivitet).

Ekvivalensrelationer påminner på många sätt om likhetsrelationen =, de förra abstraherar/generaliserar den senares egenskaper. Vi skall härnäst generalisera och abstrahera egenskaperna hos ordningsrelationen $\leq$.

Definition: En relation R på en mängd A som är reflexiv, antisymmetrisk, och transitiv kallas för en partiell ordning. Mängden A sägs då vara en partiellt ordnad mängd.

Exempel: Relationen $\leq$ är reflexiv ($x \leq x$), antisymmetrisk ($x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$), och transitiv ($x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$). Alltså är $\leq$ en partiell ordning på $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$).

Notation: En partiell ordning betecknar vi ofta $\preceq$, och vi anger ibland $(A, \preceq)$ när vi vill tala om den partiellt ordnade mängden A.

Definition: En partiell ordning $\preceq$ på A kallas för en total ordning om det för alla $x, y \in A$ gäller minst en av $x \preceq y$ eller $y \preceq x$.

Exempel: Den partiella ordningen $\leq$ är en total ordning, eftersom det alltid gäller att $x \leq y$ eller $y \leq x$.

Se fler exempel i avsnitt 3.8 i boken!

Det finns partiella ordningar som inte är totala.

Exempel: Låt $A = \{1,2,3\}$ och $B = P(A)\setminus\{\emptyset\}$, och betrakta relationen $\subseteq$ på B. Vi kan kontrollera reflexivitet, antisymmetri, och transitivitet, så $\subseteq$ är en partiell ordning. Däremot gäller exempelvis varken $\{1,3\} \subseteq \{2,3\}$ eller $\{2,3\} \subseteq \{1,3\}$, så $\subseteq$ är inte en total ordning på B.

Definition: Antag att $(A, \preceq)$ är en partiellt ordnad mängd. Om $m \in A$ är sådant att det för alla $a \in A$ gäller att $a \preceq m \Rightarrow a = m$ kallar vi m för ett <u>minimalt element</u>.

Anmärkning: Det är inte säkert att det finns något minimalt element, och om det finns är det inte säkert att det bara finns ett.

Exempel: I förra exemplet gäller att det finns tre minimala element, $\{1\}$, $\{2\}$, och $\{3\}$.

Definition: Antag att $(A, \preceq)$ är en partiellt ordnad mängd. Ett element $m \in A$ kallas ett <u>minsta element</u> om $m \preceq a$ för alla $a \in A$.