Mårten Wadenbäck

Summor (och andra upprepade operatorer)

Vi har sett att det finns gott om associativa operatorer. Om vi vill använda samma associativa operator på en lista med flera element använder vi ofta en större variant av operatorsymbolen och skriver exempelvis

$$\bigcup_{j=1}^{5} A_j = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

eller

$$\bigwedge_{\beta=1}^{n} P_\beta = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n.$$

Anmärkning: Indexvariabelns namn spelar ingen roll.

Om operatorn dessutom är kommutativ kan vi även använda en indexmängd:

$$\bigcap_{r \in \{1,-2,5\}} T_r = T_1 \cap T_{-2} \cap T_5.$$

Anmärkning: Om $*$ är kommutativ gäller det att

$$\mathop{\LARGE *}_{j=a}^{b} A_j = A_a * A_{a+1} * \dots * A_{b-1} * A_b = \mathop{\LARGE *}_{j \in B}$$

där $B = \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$.

Om operatorn $*$ har en identitet e brukar vi låta

$$\mathop{\LARGE *}_{j \in \emptyset} A_j = e.$$

Exempel: Om A är en mängd så är en partition av A en indelning av A i delmängder A_j, $j = 1, \dots, n$, sådana att

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A \quad \text{och} \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Observera att indexvariabeln går igenom hela indexmängden helt oavsett vilket uttryck som står, så exempelvis är

$$\mathop{\LARGE *}_{\beta=7}^{10} S_\alpha = \underbrace{S_\alpha}_{\beta=7} * \underbrace{S_\alpha}_{\beta=8} * \underbrace{S_\alpha}_{\beta=9} * \underbrace{S_\alpha}_{\beta=10}.$$

Summor och produkter har andra symboler:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

och

$$a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \prod_{j=3}^{5} a_j.$$

Definition: För $n \in \mathbb{N}$ definierar vi $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Exempel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $1! = 1$, och $0! = 1$.

Det sista är en konsekvens av att $\prod_{j \in \emptyset} A_j = 1$.

Ibland är det användbart att göra ett variabelbyte i summor (eller andra upprepade operatorer):

$$\sum_{j=a}^{b} A_j = \sum_{k=0}^{b-a} A_{k+a} = \sum_{j=0}^{b-a} A_{j+a}.$$

För kommutativa operatorer kan vi även utföra operationen "baklänges":

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup \dots \cup A_n = A_n \cup \dots \cup A_1 = \bigcup_{j=0}^{n-1} A_{n-j}.$$

Definition: Låt $a_0, a_1, \dots$ vara en följd av reella tal, och betrakta summan $S(n) = \sum_{j=0}^{n} a_j$.

1. Om det finns ett reellt tal d sådant att det för alla $j = 1, 2, \dots$ gäller att $a_j - a_{j-1} = d$ sägs $S(n)$ vara en aritmetisk summa.

2. Om det finns ett reellt tal d sådant att det för alla $j = 1, 2, \dots$ gäller att $\frac{a_j}{a_{j-1}} = d$ sägs $S(n)$ vara en geometrisk summa.

Sats: En summa $\sum_{j=0}^{n} a_j$ är en aritmetisk summa om och endast om $a_j = A + Bj$ för alla j, och en geometrisk summa om och endast om $a_j = AB^j$ för alla j.

Bevis: Om $S(n)$ är en aritmetisk summa gäller

$a_j - a_{j-1} = d \Leftrightarrow a_j = a_{j-1} + d$, så $a_1 = a_0 + d$, $a_2 = a_1 + d = \underbrace{a_0 + d}_{a_1} + d$, osv.

Om $a_j = A + Bj$ är

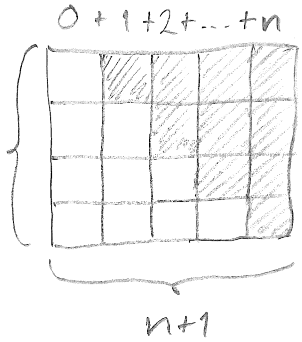
$$a_j - a_{j-1} = A + Bj - (A + B(j-1)) = A + Bj - A - B(j-1) =$$

$$= A + Bj - A - B_j + B = B.$$

På motsvarande sätt visas fallet med geometrisk summa.

Exempel: Summan $\sum_{j=0}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n+1} = n+1$ är både en aritmetisk och en geometrisk summa. Summan $\sum_{j=0}^{n} j = 0+1+2+\ldots+n$ är en aritmetisk summa.

Den senare kan åskådliggöras enligt figuren,



så vi ser att

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sats: En aritmetisk summa $\sum_{j=0}^{n} A + Bj$ kan beräknas och har värdet $\sum_{j=0}^{n} A + Bj = A(n+1) + B\frac{n(n+1)}{2}$.

Bevis: Genom att agera utbrytarkung får vi

$$\sum_{j=0}^{n} A + B_j = \sum_{j=0}^{n} A + \sum_{j=0}^{n} B_j = A \sum_{j=1}^{n} 1 + B \sum_{j=0}^{n} j =$$

$$= A(n+1) + B\frac{n(n+1)}{2}.$$

Sats: En geometrisk summa $\sum_{j=0}^{n} AB^j$ kan beräknas och har värdet

$$\sum_{j=0}^{n} AB^j = \begin{cases} A(n+1) & \text{om } B=1 \\ A\dfrac{1-B^{n+1}}{1-B} & \text{om } B\neq 1. \end{cases}$$

Bevis: Fallet $B=1$ kan vi redan.

Om $B\neq 1$ är

$$\sum_{j=0}^{n} AB^j = A\sum_{j=0}^{n} B^j = A(1+B+B^2+\dots+B^n) =$$

$$= A\frac{1}{1-B}\cdot(1-B)(1+B+\dots+B^n) =$$

$$= A\frac{1}{1-B}(1-B+B-B^2+B^2-B^3+\dots+B^n-B^{n+1}) = A\frac{1-B^{n+1}}{1-B}.$$

Exempel: $9+90+900+\dots+9000000 = \sum_{j=0}^{6} 9\cdot 10^j =$

$$= 9\cdot\frac{1-10^7}{1-10} = 9\cdot\frac{-9999999}{-9} = 9999999.$$

Exempel: Det gäller att $(n+1)^3 = (1^3-0^3)+(2^3-1^3)+\dots+((n+1)^3-n^3)$, alltså är $(n+1)^3 = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^3 - j^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3+3j^2+3j+1-j^3 =$

$$= \sum_{j=0}^{n} 3j^2+3j+1 = 3\sum_{j=0}^{n} j^2 + 3\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1 =$$

$$= 3\sum_{j=0}^{n} j^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n+1,$$ så

$$3\sum_{j=0}^{n} j^2 = n^3+3n^2+3n+1 - \frac{3n^2+3n}{2} - n - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n^3+6n^2+6n+2-3n^2-3n-2n-2}{2} =$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n) = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$