Matematisk induktion

Alla talmängder vi arbetat med hittills ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, och $\mathbb{C}$) har vi använt genom att lita till vår intuition och vana. Egentligen behöver de införas på ett matematiskt stringent sätt för att man med säkerhet skall kunna uttala sig om deras egenskaper. Deta görs oftast genom Peanos axiomsystem (se kapitel A). Peanos axiom leder till induktionsprincipen:

> Antag att $P(n)$ är ett predikat med avseende på universumet $\mathbb{N}$. Om
>
> 1. $P(0)$ är sann (basfallet), och
> 2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (induktionssteget)
>
> så är $P(n)$ sann för alla n.

Anmärkning: Det går lika bra att byta ut 0 i $P(0)$ mot ett godtyckligt $k \in \mathbb{N}$, med ändringen att $P(n)$ då är sann för alla $n \geq k$.

Exempel: Låt $P(n)$: $\sum_{j=0}^{n} 2j+1 = (n+1)^2$. Vi kontrollerar

basfallet, $P(0)$: $\sum_{j=0}^{0} 2j+1 = (0+1)^2$ är sant.

För att visa induktionssteget antar vi

att $P(n)$ är sann, och visar att detta

medför att även $P(n+1)$ är sann. Antag

alltså att $\sum_{j=0}^{n} 2j+1 = (n+1)^2$ för något n.

Då är $$\sum_{j=0}^{n+1} 2j+1 = 2(n+1)+1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} 2j+1}_{(n+1)^2} =$$

$$= 2n+3 + (n+1)^2 = 2n+3+n^2+2n+1 =$$

$$= n^2+4n+4 = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2,$$

Så $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Vi kan alltså dra slutsatsen att $P(n)$

är sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel: Vi visar att $2^n > n$ för alla n. Låt oss

för omväxlings skull börja med induktionssteget, dvs antag att det för något givet n gäller att $2^n > n$. Då är tydligen

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > n + n > n+1,$$

under förutsättning att $n > 1$. Vi behöver därför separat kontrollera tre basfall, nämligen

$$2^0 > 0, \quad 2^1 > 1, \quad \text{och} \quad 2^2 > 2.$$

Eftersom dessa stämmer, och eftersom induktionssteget fungerade, gäller $2^n > n$ för alla n.

Ibland behövs en variant av induktionsprincipen, där induktionssteget bygger på mer än bara förra värdet. Den <u>andra induktionsprincipen</u> lyder:

Antag att $P(n)$ är ett predikat med avseende på universumet $\mathbb{N}$. Om

1. $P(0)$ är sann, och
2. $P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$

så är $P(n)$ sann för alla n.

Exempel: Beräkna summan $S(n)=\sum_{j=0}^{n} j^3$. Vi testar några

värden på n:

n	$S(n)$	
0	$0^3=0$	$=0^2$
1	$0^3+1^3=1$	$=1^2$
2	$0^3+1^3+2^3=9$	$=3^2$
3	$0^3+1^3+2^3+3^3=36$	$=6^2$
4	$0^3+1^3+2^3+3^3+4^3=100$	$=10^2$

S(n) ser ut att vara kvadraten av triangeltalet $\sum_{j=0}^{n} j$.

Vi har redan kollat flera basfall, så vi försöker visa induktionssteget. Antag därför att det för något n gäller att $\sum_{j=0}^{n} j^3 = \left(\sum_{j=0}^{n} j\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$. Då är

$$\sum_{j=0}^{n+1} j^3 = (n+1)^3 + \sum_{j=0}^{n} j^3 = (n+1)^3 + \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} =$$

$$= \frac{4(n^3+3n^2+3n+1)+n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}.$$

Är detta lika med det önskade, dvs

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4} = \frac{n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}{4} =$$

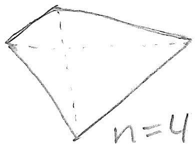
$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} \; ?$$

Ja! Alltså gäller via induktion att $\sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

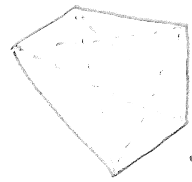
Ibland är som sagt basfallet $P(k)$ för något $k>0$.

Exempel: Hur många diagonaler finns det i en konvex n-hörning? Här är det förstås meningslöst att tala om $n<3$. Vi testar några små värden på n:

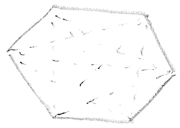
$n=3$
0 diagonaler



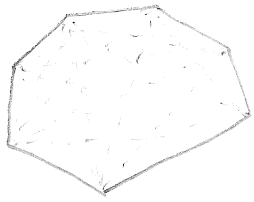
$n=4$
2 diagonaler



$n=5$
5 diagonaler



$n=6$
9 diagonaler



$n=7$
14 diagonaler

Vi tycker oss se mönstret att antalet diagonaler först ökar med två, sedan tre, sedan fyra, osv.

Om detta gäller allmänt är antalet diagonaler

$$D(n) = \sum_{j=2}^{n-2} j = \sum_{j=0}^{n} j \quad -0-1-(n-1)-n =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n^2+n-4n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Vi har alltså en hypotes att $P(n): D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$

är sann för alla $n \geq 3$, och vi försöker bevisa

detta genom induktion. Basfallet är $P(3)$, som

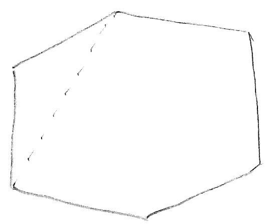
är sann eftersom $0 = \frac{3(3-3)}{2}$.

Antag nu att $P(n)$ är sann för ett visst n,

dvs att $D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, och betrakta en

konvex $(n+1)$-hörning.

I denna kan vi dra en diagonal som ger oss en n-hörning och en triangel.



I triangeln finns inga diagonaler, och i n-hörningen

finns enligt antagandet $D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonaler.

Från det "bortklippta" hörnet kan vi slutligen

dra $n-2$ diagonaler till de övriga hörnen.

Således är $D(n+1) = 1 + \frac{n(n-3)}{2} + n - 2 =$

$$= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}.$$

Eftersom detta faktiskt är lika med $\frac{(n+1)((n+1)-2)}{2}$

så gäller $P(n+1): \; D(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)-2)}{2}$, så

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$, och vi har bevisat att $P(n)$

är sann för alla $n \geq 3$.

Varning: Det är lätt att bli lurad av ett

felaktigt induktionsbevis!

Exempel (fel): Vi visar att $3^n = 1$ för alla n.

Basfallet $3^0 = 1$ är sant. Antag nu att påståendet

är sant upp till och med n, dvs att $3^0 = 1$, $3^1 = 1$,

$\ldots$, $3^n = 1$. Då gäller

$$3^{n+1} = 3^{2n-2-(n-3)} = \frac{(3^{n-1})^2}{3^{n-3}} = \frac{1^2}{1} = 1,$$

alltså gäller det att $3^n = 1$ för alla n.