Mårten Wadenbäck

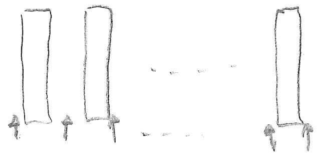
Rekursion

Rekursion påminner om induktion, men istället för att vara en bevismetod handlar rekursion om att definiera en följd (av tal, funktioner, geometriska figurer, ...).

Definition: Talföljden $f(1), f(2), \ldots$ är rekursivt definierad om

1. talen $f(1), f(2), \ldots, f(a)$ är givna (begynnelsevärden),
2. $f(n)$ är uttryckt som en funktion av $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$ (rekursionsekvationen).

Exempel: På hur många sätt kan vi ställa fem böcker på en hylla? Låt $f(n)$ vara antalet sätt att ställa n böcker på ett hyllplan. Vi kan ställa $n-1$ böcker på hyllan på $f(n-1)$ sätt, och för vart och ett av dessa finns det n möjliga platser att ställa sista boken.

Se figur: 

Alltså uppfyller $f(n)$ rekursionsekvationen

$f(n) = n f(n-1)$, som gäller för alla $n \geq 1$.

Eftersom det bara finns ett sätt att sätta in noll böcker är $f(0) = 1$. Talföljden är alltså rekursivt definierad, och vi kan beräkna

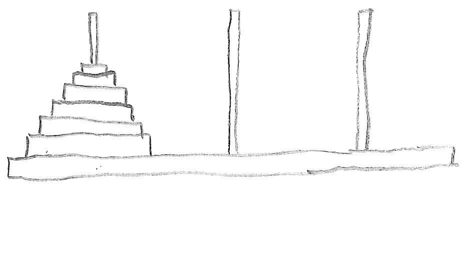
$f(0)=1$ $\quad$ $f(1)=1 \cdot 1=1$ $\quad$ $f(2)=2 \cdot f(1)=2 \cdot 1=2$

$f(3)=3 \cdot f(2)=3 \cdot 2=6$ $\quad$ $f(4)=4 \cdot f(3)=4 \cdot 6=24$

$f(5)=5 \cdot f(4)=5 \cdot 24=120.$

Talet $f(n)$ är förstås inget annat än $f(n)=n!$.

Exempel: Tornen i Hanoi är en leksak där ett antal olika stora skivor skall flyttas från en av tre pinnar till en annan, en i taget, och utan att en större skiva läggs på en mindre.



Går det att göra för ett godtyckligt antal skivor, och i så fall, hur många förflyttningar krävs?

Låt $f(n)$ beteckna minsta antalet förflyttningar för att flytta n skivor. För att flytta n skivor måste vi först flytta de $n-1$ översta skivorna till mittpinnen, sedan flytta största brickan, och till sist flytta de $n-1$ brickorna ovanpå största brickan. Detta gör att $f(n)=2f(n-1)+1$. Att flytta noll skivor kräver noll förflyttningar, så $f(0)=0$. Alltså är $f(n)$ en rekursivt definierad talföljd.

Vi beräknar några tal i följden:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0	1	3	7	15	31	63	127	255

Det ser ut som att $f(n)=2^n-1$. Vi testar att bevisa detta med induktion! Vi har redan tillräckligt med basfall, så det är dags för induktionssteget.

Antag att $f(n)=2^{n-1}$ gäller för ett givet n. Då är

$$f(n+1)=2f(n)+1=2\cdot(2^n-1)+1=2\cdot 2^n-2+1=2^{n+1}-1,$$

vilket alltså visar att $f(n)=2^{n-1}$ för alla n.

Ofta när ett problem inte går att lösa exakt definierar man en rekursiv följd som mer och mer närmar sig en lösning.

Exempel: Antag att vi behöver räkna ut $\sqrt{10}$ på en miniräknare som saknar roten-ur-knapp. En idé kan då vara att beräkna ett antal element i talföljden

$$\begin{cases} f(1) = \text{startgissning} \\ f(n) = \dfrac{f(n-1) + \frac{10}{f(n-1)}}{2} \quad \text{då } n > 1. \end{cases}$$

Om vi börjar med $f(1)=5$ (dålig gissning) blir $f(n) = 3.16227766017$ för $n \geq 6$. Börjar vi med $f(1)=3$ fås samma resultat för $n \geq 4$.

Anmärkning: Vi kan generalisera begreppet rekursion till andra indexmängder än de positiva heltalen. Ett nödvändigt (men inte tillräckligt) krav är att indexmängden är partiellt ordnad och att alla minimala element används som begynnelsevärden. (Kom ihåg att $a \in A$ är minimalt om $m \preceq a \Rightarrow a = m$.)

Exempel: Antag att vi har en budget på 10 kr som vi skall köpa praliner för. Det råkar endast finnas fyra olika praliner (en av varje). Deras pris och hur goda de är framgår av tabellen

pris	p	3	4	5	7
smak	s	5	6	8	10.

Vilka praliner skall vi välja? I just det här exemplet ser vi efter en kort stund att vi skall ta dem som kostar 3 kr respektive 7 kr för att få så god smak som det går att få, dvs 15.

Vi kan komma fram till detta rekursivt!
Låt $f(m,n)$ vara bästa valet av praliner om vi bara kan välja bland de m första pralinerna och har en budget på n kr.
Vi söker talet $f(4,10)$. Helt klart är

$$f(1,n)=\begin{cases}0 & \text{om } n<3\\ 5 & \text{om } n\geq 3.\end{cases}$$

Viss eftertanke leder även till

$$f(m,n) = \begin{cases} f(m-1,n) & \text{om } n < p_m \\ \max\left(f(m-1,n),\ f(m-1,n-p_m)+s_m\right) & \text{om } n \geq p_m. \end{cases}$$

Vi beräknar värdena i en tabell:

praliner \ budget	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5
2	0	0	0	5	6	6	6	11	11	11	11
3	0	0	0	5	6	8	8	8	13	14	14
4	0	0	0	5	6	8	8	10	13	14	15

Här kan vi få reda på att bästa sättet att välja är att ta pralin 1 och 4, som ger smakupplevelsen 15.