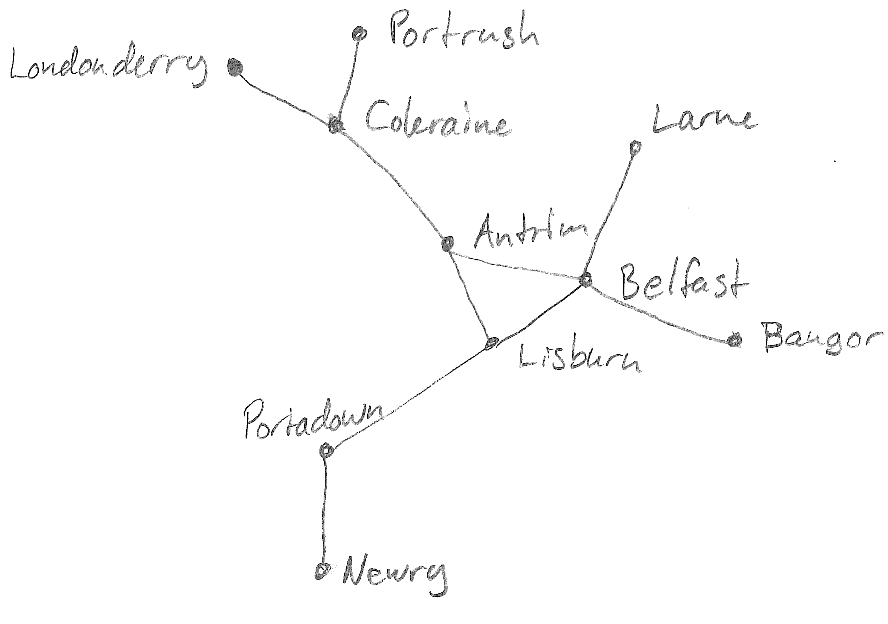
Mårten Wadenbäck

Grafer och träd

En graf är en struktur som består av noder tillsammans med kanter som sammanbinder vissa noder. Grafer är användbara som modeller för olika typer av nätverk, strukturformler, relationer, hierarkier, beroenden, osv.

Exempel: Tåglinjer i Nordirland (förenklad):

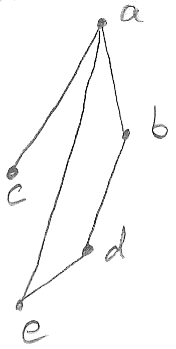


Definition: Låt V vara en mängd, och låt $E \subseteq \{A \in \mathcal{P}(V) : |A| = 2\}$. Då är $G = (V, E)$ en graf med elementen i V som noder och elementen i E som kanter.

Anmärkning: Ibland säger man bågar istället för kanter.

Anmärkning: Definitionen tillåter inte fler kanter mellan samma par av bågar, och inte heller öglor (kanter som går från en nod till sig själv. Behöver man detta skall man istället använda en multigraf.

Exempel: Grafen i figuren har nodmängd $V=\{a,b,c,d,e\}$ och kantmängd $E=\{\{a,c\},\{a,b\},\{a,e\},\{b,d\},\{d,e\}\}$.



Definition: Om $v\in V$ kallar vi talet $|\{u\in V:\{u,v\}\in E\}|$ för graden av v, som betecknas d_v.

Graden av en nod är alltså antalet kanter som har en ände i noden.

Exempel: För grafen i förra exemplet är $d_a=3$, $d_b=2$, $d_c=1$, $d_d=2$, och $d_e=2$.

Sats: För varje graf $G=(V,E)$ gäller att $\sum_{v\in V} d_v$ är ett jämnt tal.

Följdsats: I varje graf finns ett jämnt antal noder med udda gradtal.

Exempel: Av de tio noderna i grafen över Nordirlands tåglinjer är det bara Belfast och Portadown som har jämnt gradtal, så de övriga åtta har udda gradtal.

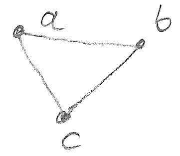
Tåglinjerna i Nordirland utgör bara en del av hela transportnätet, som kan betraktas som en större graf.

Definition: Låt $G=(V,E)$ vara en graf. En graf $G'=(V',E')$ kallas för delgraf till G om $V' \subseteq V$ och $E' \subseteq E$.

En delgraf är inducerad om de enda kanterna som tagits bort är de som går till noder som tagits bort, dvs $\{u,v\} \in E \wedge \{u,v\} \subseteq V' \Rightarrow \{u,v\} \in E'$.

Exempel: Om det går en buss mellan Antrim och Larne är delgrafen med tåglinjerna inte inducerad, eftersom kanten {Antrim, Larne} har tagits bort utan att noderna tagits bort.

Anmärkning: En graf är alltid en inducerad delgraf till sig själv.

Exempel: De inducerade delgraferna till 

är 

 och den helt tomma grafen.

Sats: En graf som har n noder har 2^n inducerade delgrafer.

Bevis: För varje nod i grafen tar vi beslutet att behålla noden eller att ta bort noden och alla kanter som går till noden.

Definition: Låt k vara ett positivt heltal och låt $G=(V,E)$ vara en graf. En <u>väg</u> av längd k är en följd av noder $v_0, \dots, v_k$ sådana att $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ för alla $i \in \{0, \dots, k-1\}$. En <u>enkel väg</u> är en väg där varje nod längs vägen endast besöks en gång, dvs där $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$. (En enda nod brukar ses som en väg av längd 0.)

Exempel: Paul Erdős var en ungersk matematiker som är känd för sina många samarbeten. Det så kallade Erdős-talet definieras som längden av kortaste vägen (i samarbetsgrafen) till Paul Erdős. Personer som inte har någon väg till Paul Erdős har Erdős-tal ∞.

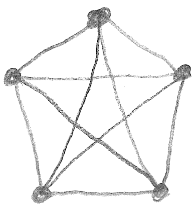
Definition: En graf kallas <u>sammanhängande</u> om det finns en väg mellan varje par av noder.

Exempel: Tåglinjerna i Nordiland utgör en sammanhängande graf, men samarbetsgrafen ovan är inte sammanhängande.

En graf som har en kant mellan varje par av noder kallas för en <u>fullständig graf</u> och betecknas K_n (där n är antalet noder).

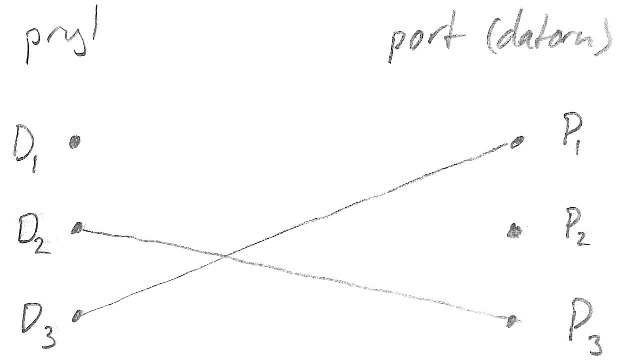
Exempel: På en middag med fem personer hälsar alla en gång på varandra. Hur många hälsningar blir det?

Vi kan räkna antalet kanter i K_5 och se att det finns tio stycken.



(Detta stämmer överens med $\binom{5}{2}=10$.)

Exempel: En laptop har tre USB-A-portar, och vi har tre prylar med micro-USB-B-kontakt. Varje möjlig anslutning kan beskrivas med en graf, exempelvis



Definition: En graf $G=(V,E)$ kallas för en bipartit graf om nodmängden kan delas upp i två disjunkta mängder A och B så att inga av grafens kanter går "inom" A eller B, dvs om

i) $A \cup B = V$ och $A \cap B = \emptyset$, och

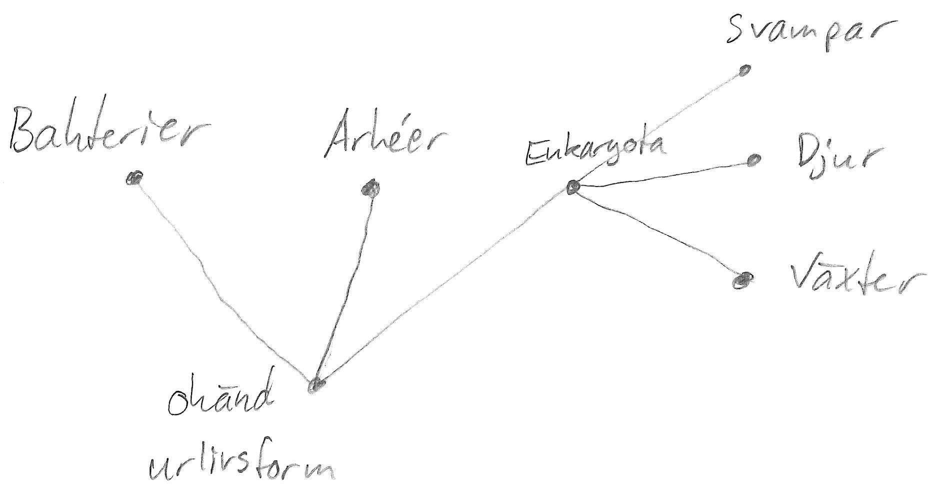
ii) $e \in E \Rightarrow e \cap A \neq \emptyset \wedge e \cap B \neq \emptyset$.

En bipartit graf med m noder i A och n noder i B och med så många kanter det går kallas den fullständiga bipartita grafen $K_{m,n}$. USB-anslutningarna ovan blir en delgraf av $K_{3,3}$, men inte en inducerad delgraf.

Definition: En cykel är en väg i en graf, där första och sista noden är samma, och där inga kanter upprepas. En enkel cykel är en cykel om den är en enkel väg bortsett från första/sista noden, dvs om $v_0, \dots, v_{n-1}$ är en enkel väg.

Definition: En sammanhängande graf som saknar cykler kallas för ett träd.

Exempel: Ett stamträd för vår planets livsformer:



Sats: En graf $G=(V,E)$ är ett träd precis då det för varje par av noder finns precis en unik väg mellan dem.

Sats: En sammanhängande graf med n noder är ett träd precis då den har $n-1$ kanter.

Exempel: Hur många träd finns det med fyra noder? Enligt satsen skall ett träd ha tre kanter. Med fyra noder finns det $\binom{6}{3}$ sätt att välja tre kanter, men fyra av dessa ger cykler. Alltså får vi $\binom{6}{3}-4=16$ olika träd.