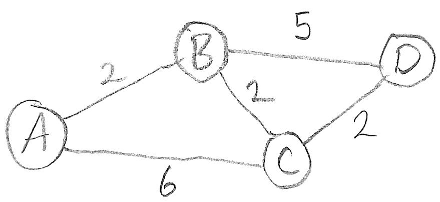
Mårten Wadenbäck

Fortsättning av grafteorin

Ibland är det användbart att arbeta med viktade grafer, dvs grafer där varje kant har en viss vikt. Detta kan modellera motstånd, kapaciteter, kostnader, avstånd, etc.

Exempel: I ett rörsystem mellan fyra noder har rören kapaciteter som visas i grafen:



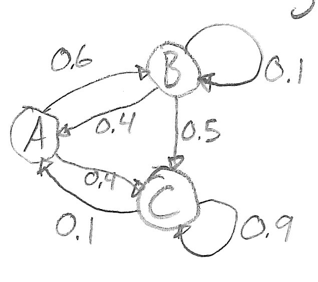
Hur stort är det största flödet vi kan få mellan nod A och nod D? Detta är ett exempel på det välkända max-flow-problemet (det finns ett par trevliga algoritmer som löser detta).

Det finns en sats som säger att största möjliga flödet mellan två noder är lika med minsta kostnaden för att separera dem, där kostnaden är summan av kantvikterna för de kanter som klipps av vid separationen.

Ett annat vanligt sätt att generalisera grafbegreppet på är att tala om <u>riktade grafer</u>, dvs grafer där varje kant har en bestämd riktning. För riktade grafer brukar vi tillåta upp till två kanter mellan samma par av noder, men bara om de har olika riktning. För en riktad graf $G=(V,E)$ är $E \subseteq V \times V$ (något enklare än det oriktade fallet).

Anmärkning: I riktade grafer är det naturligt att tillåta att en kant har samma startnod och slutnod.

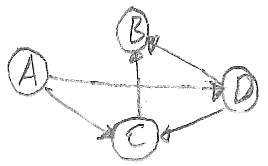
Exempel: En Markovkedja beskriver ett slumpförlopp där en slumpvariabel kan anta olika värden (tillstånd) med sannolikheter som beror på det senaste (nuvarande) värdet. Markovkedjor illustreras ofta som riktade riktade grafer med de så kallade övergångssannolikheterna på kanterna:



För riktade grafer blir det konstigt att tala om graden av en nod. I stället får vi titta på nodens <u>utgrad</u> $u_v = |\{x \in V : (v,x) \in E\}|$ och dess <u>ingrad</u> $i_v = |\{x \in V : (x,v) \in E\}|$.

På samma sätt som för oriktade grafer kan vi införa vägar och cykler: en <u>riktad väg</u> av längd k är en följd av noder $v_0, \dots, v_k$ sådan att $(v_i, v_{i+1}) \in E$, och en <u>riktad cykel</u> är en riktad väg som börjar och slutar i samma nod.

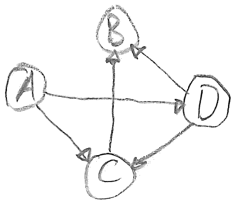
Exempel: Grafen i figuren innehåller två riktad vägar från A till B av längd två, men inga riktade cykler av längd ≥ 1:

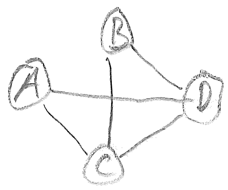


Båda de riktade vägarna från A till B är enkla, eftersom de inte återbesöker någon nod.

Definition: Låt $G=(V,E)$ vara en riktad graf. Den <u>underliggande grafen</u> $G^u = (V^u, E^u)$ definieras av att $V^u = V$ (samma noder) och $E^u = \{\{x,y\} : (x,y) \in E \vee (y,x) \in E\}$.

Definition: En riktad graf sägs vara <u>sammanhängande</u> om dess underliggande graf är sammanhängande. Om det finns en riktad väg mellan varje par av noder sägs grafen vara <u>starkt sammanhängande</u>.

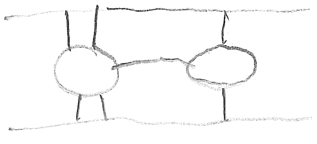
Exempel: Den riktade grafen 

har grafen 

som underliggande graf, och är alltså sammanhängande. Däremot är den inte starkt sammanhängande, eftersom det exempelvis inte finns någon riktad väg från B (men det finns riktade vägar till B från alla andra noder).

Definition: En <u>Eulerväg</u> i en graf G är en väg i G som innehåller varje kant precis en gång. En <u>Eulercykel</u> är en cykel som innehåller varje kant precis en gång.

Obligatoriskt exempel (Broarna i Königsberg): I Königsberg fanns sju broar som förband två öar i floden med varandra och flodens båda sidor enligt figuren:



Invånarna i staden ville ta promenader så att de gick över varje bro precis en gång, men Leonhard Euler gjorde dem besvikna genom att förklara för dem varför det aldrig gick.

Euler kom fram till följande sats.

Sats: En sammanhängande graf G innehåller en Eulercykel om och endast om varje nod har ett jämnt gradtal.

Följdsats: Låt a och b vara noder i den sammanhängande grafen G. Det finns en Eulerväg från a till b precis då a och b är de enda noderna med udda gradtal.

Istället för att passera varje kant precis en gång kan vi tänka oss vägar som passerar varje nod precis en gång.

Definition: En <u>Hamiltoncykel</u> i grafen G är en cykel som besöker varje nod i G precis en gång.

En <u>Hamiltonväg</u> i G definieras på motsvarande sätt.