Mårten Wadenbäck

Matriser

En matris är en rektangulär tabell som innehåller tal (eller ibland andra slags objekt som går att addera och multiplicera), och som uppfyller vissa räkneregler som vi strax skall se.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 7 & 4 \end{bmatrix}$ är en matris med två rader och tre kolonner, och är ett exempel på en så kallad 3×2-matris.

Terminologi: En matris med m rader och n kolonner kallas för en $m \times n$-matris. Om $m=n$ kallas den för en kvadratisk matris av storlek m.

Med elementet på plats (i,j) menas elementet på rad i och i kolonn j.

Ofta är man intresserad av att hantera en viss rad eller kolonn i sin helhet. Om A är en $m \times n$-matris betecknar vi rad i med $a_{i\cdot}$ och kolonn j med $a_{\cdot j}$.

Exempel: Om $A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & \sqrt{2}\\ \frac{1}{3} & 7 & 4\end{bmatrix}$ så är $a_{1\cdot}=[-3\ 0\ \sqrt{2}]$

och $a_{\cdot 2}=\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}$. Enskilda element kommer vi

åt med $a_{13}=\sqrt{2}$ och $a_{21}=\frac{1}{3}$.

Definition: Låt A och B vara $m\times n$-matriser.

Vi definierar $A+B$ som den $m\times n$-matris C vars element ges av $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Om α är ett tal definierar vi αA som den $m\times n$-matris D vars element ges av $d_{ij}=\alpha a_{ij}$.

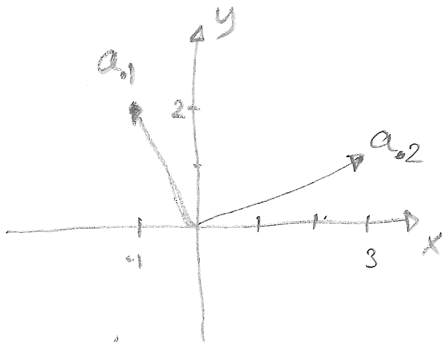
Exempel: Vi har att

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\cdot 1 & 4\cdot 1\\4\cdot 0 & 4\cdot(-2)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 4\\0 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4 & 2+4\\3+0 & 4-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\3 & -4\end{bmatrix}.$$

Anmärkning: Eftersom addition av tal är kommutativ och associativ blir matrisaddition också kommutativ och associativ.

Terminologi: En matris som bara har en rad kallas <u>radmatris</u> eller <u>radvektor</u>, och en matris med en enda kolonn kallas <u>kolonnmatris</u> eller <u>kolonnvektor</u>.

Exempel: Låt $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Kolonnerna (raderna går också) i A kan tolkas geometriskt:



I allmänhet gäller att om A är en $m\times n$-matris så kan varje kolonn identifieras med ett element i den kartesiska produkten $\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{m \text{ st}}$ och varje rad med ett element i $\mathbb{R}^n$.

Definition: Låt A vara en mängd sådan att

i) $u\in A \Rightarrow xu \in A$ för alla tal x

ii) $u,v\in A \Rightarrow u+v\in A$.

Om $u_1,\dots,u_n\in A$ och $x_1,\dots,x_n$ är tal kallas uttrycket

$$x_1u_1+x_2u_2+\dots+x_nu_n$$

för en <u>linjärkombination</u> av $u_1,\dots,u_n$.

Exempel: Om a och b är tal (som inte båda är noll) kan $\mathrm{sgd}(a,b)$ skrivas som en linjärkombination av a och b. (Detta är Bézouts identitet.)

Exempel: Om A är en $m\times n$-matris kan vi skapa en godtycklig linjärkombination av dess kolonner, $C = x_1 a_{\cdot 1} + x_2 a_{\cdot 2} + \dots + x_n a_{\cdot n}$, och resultatet blir en kolonnvektor med m element (samma storlek som raderna i A). Talen $x_1, \dots, x_n$ kan vi samla i en kolonnvektor X av längd n.

Definition: Låt A vara en $m \times n$-matris och låt X vara en kolonnvektor av längd n. Vi definierar då $AX = x_1 a_{\cdot 1} + x_2 a_{\cdot 2} + \dots + x_n a_{\cdot n}$.

Anmärkning: Detta gör att en $m \times n$-matris A definierar en funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Detta kommer att utvecklas och utnyttjas i er kurs i linjär algebra.

Exempel: Om $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 7 & 4 \end{bmatrix}$ och $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ blir

$$AX = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4\sqrt{2} - \frac{19}{3} \end{bmatrix}.$$

Definition: Låt A vara en $m \times n$-matris och låt B vara en $n \times p$-matris. Vi definierar då <u>matrismultiplikation</u> av A och B som

$$AB = [Ab_{\cdot 1} \; Ab_{\cdot 2} \; \cdots \; Ab_{\cdot p}].$$

Exempel: Om $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ blir

$$AB = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = \left[2\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 0\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}.$$

Anmärkning: Matriser måste vara av kompatibel storlek för att kunna multipliceras. Om AB är definierad är det inte säkert att BA är definierad (och tvärtom), och även om både AB och BA är definierade är de i allmänhet olika. Matrismultiplikation är alltså inte kommutativ.

Sats: Låt A vara en $m\times n$-matris, låt B vara en $n\times p$-matris, och låt C vara en $p\times r$-matris. Då är

$$(AB)C = A(BC),$$

dvs matrismultiplikation är associativ.

Exempel: Antag att i en population gäller att av dem som är friska en viss dag är 90% friska även nästa dag (resten blir sjuka) och av dem som är sjuka en viss dag fortsätter hälften att vara sjuka nästa dag. Detta leder till ett "ihopkopplat" rekursivt system (f_n är antalet friska dag n och s_n är antalet sjuka dag n):

$$\begin{cases} f_{n+1} = 0.9 f_n + 0.5 s_n \\ s_{n+1} = 0.1 f_n + 0.5 s_n \end{cases} \iff$$

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ s_{n+1} \end{bmatrix} = f_n \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} + s_n \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ s_n \end{bmatrix}.$$

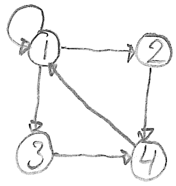
Vad händer två dagar fram i tiden?

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} \\ s_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ s_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ s_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.81+0.05 & 0.45+0.25 \\ 0.09+0.05 & 0.05+0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86 & 0.7 \\ 0.14 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ s_n \end{bmatrix}.$$

Av dem som är friska idag kommer 86% vara friska i övermorgon, och av dem som är sjuka idag kommer 30% vara sjuka i övermorgon.

Om $G=(V,E)$ är en ändlig riktad graf med $|V|=n$ kan G representeras av en grannmatris M som har en etta på plats (i,j) precis då $(i,j)\in E$ (och annars en nolla).

Exempel: Den riktade grafen  har grannmatris

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Summerar vi elementen i en kolonn $m_{\cdot j}$ får vi ingraden för nod j, och summerar vi elementen i en rad $m_{i\cdot}$ får vi utgraden för nod i.

Sats: Låt $G=(V,E)$ vara en riktad graf med grannmatris M.

Antalet vägar av längd två från i till j ges av element (i,j) i M^2. Antalet vägar av längd $k\geq 1$ från i till j ges av element (i,j) i M^k.