Mårten Wadenbäck

Repetition

Satslogiken handlar om att studera samband mellan logiska utsagor, dvs yttranden som i det givna sammanhanget har ett sanningsvärde (sant/falskt).

Exempelvis är

A: Det finns glass i frysen.

en logisk utsaga, medan

B: Glass är gott!

inte är det.

Utsagor kan kombineras:

- konjunktion ("och"): $P \wedge Q$ är sann precis då både P och Q är sanna.
- disjunktion ("eller"): $P \vee Q$ är sann precis då minst en av P och Q är sann.

- negation ("icke"): $\neg P$ är sann precis då P är falsk
- implikation ("medför"): $P \to Q$ framgår av sanningstabellen:

P	Q	$P \to Q$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

Om tredje raden inte kan inträffa blir $P \to Q$ en tautologi, och implikationen blir en logisk implikation.

Vi har även ekvivalens: $P \leftrightarrow Q$ är sann precis då de har samma sanningsvärde. Om ekvivalensen bara kan vara sann är det en logisk ekvivalens.

Ett logiskt argument är en följd av hypoteser samt en slutsats: $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \to C$. Skrivs även

$$\begin{array}{c} H_1 \\ \vdots \\ H_n \\ \hline C \end{array}$$

Ett argument är *giltigt* om slutsatsen blir sann då alla hypoteser är sanna.

Exempel: Argumentet nedan är giltigt, vilket kan ses genom att göra ett *motsägelsebevis*.

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \to R \\ \underline{Q \to R} \\ R \end{array}$$

Sätt $r = F$ och se om det går att få alla hypoteser sanna (i så fall är det ogiltigt), och om detta leder till en motsägelse är argumentet giltigt.

Ett *predikat* är ett påstående som beror på ett antal variabler, och blir en logisk utsaga så fort variablernas värden anges (specificeras). Exempelvis är $P(x): x > 0$ ett predikat, och för detta gäller $\exists x: P(x)$ men inte $\forall x: P(x)$. Existenskvantorn $\exists$ utläses "det finns", och *allkvantorn* $\forall$ utläses "för alla".

Om x tillhör mängden A skriver vi $x \in A$ (som är en logisk utsaga), och annars $x \notin A$.

Det finns ett antal standardmängder som man måste känna till: $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Mängder kan definieras genom en utmärkande egenskap hos elementen: $A=\{x : x^2 \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 5\}$ (vi använde här universumet $\mathbb{R}$ i första definitionen).

Elementens ordning i en mängd saknar betydelse.

Om $x \in A \Rightarrow x \in B$ är A en delmängd till B, dvs $A \subseteq B$.

Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ skriver vi $A \subset B$, och talar om en äkta delmängd.

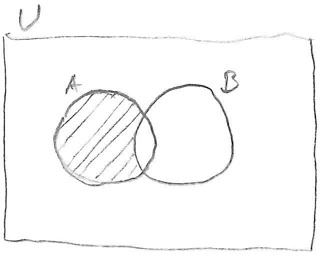
Sats: i) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (transitiv)

ii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisymmetrisk)

Mängdoperationer:

- snittet: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- unionen: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- mängddifferens: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- symmetrisk mängddifferens: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- komplement: $A^c = U \setminus A$.

Mängdoperationer illustreras ofta i *Venndiagram*:



$/// = A \setminus B$

Produktmängden (kartesiska produkten) ges av $A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$, dvs ordnade par där ett element från A kombineras med ett från B.

Potensmängden $P(A)$ är mängden av alla delmängder till A.

Exempel: Om $A = \{1,2\}$ och $B = \{3,4\}$ så är

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ och $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Vi har $A \in P(A)$, men $A \not\subseteq P(A)$.

En *funktion* ordnar för varje a i *definitionsmängden* A precis ett b i *målmängden* B. Funktioner skrivs på ett antal sätt: $f : A \to B$, $a \mapsto f(a)$, $f(a) = b, \ldots,$ och $f(x) = x^4$ och $w \mapsto w^4$ anger samma funktion. Samma element i målmängden kan antas flera gånger, och alla element behöver inte antas.

Om $f : A \to B$ och $C \subseteq A$ är *bilden av C* mängden $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$, och $f(A)$ kallas *värdemängden* till f.

Två funktioner är <u>lika</u> om de har samma definitionsmängd, målmängd, och värden för alla element i definitionsmängden.

<u>Grafen</u> till en funktion $f: A \to B$ är $graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$.

En funktion $f: A \to B$ är <u>injektiv</u> om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,

<u>surjektiv</u> om $f(A) = B$ (dvs hela målmängden antas), och

<u>bijektiv</u> om den är både injektiv och surjektiv.

Om $f: A \to B$ och $g: B \to C$ blir <u>sammansättningen</u> en funktion $g \circ f : A \to C$ som uppfyller $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Sats: Sammansättning är associativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

En <u>unär operator</u> är en funktion $f: A \to A$, och en <u>binär operator</u> är en funktion $f: A \times A \to A$.

Om $*$ är en binär operator säger vi att:

- a och b <u>kommuterar</u> om $a * b = b * a$
- $*$ är <u>kommutativ</u> om alla element kommuterar
- $*$ är <u>associativ</u> om $a * (b * c) = (a * b) * c$
- e är en <u>identitet</u> om $a * e = e * a = a \quad \forall a$
- b är <u>invers</u> till a om $a * b = b * a = e$

Sats: En binär operator $*$ har högst en identitet, och om $*$ är associativ har varje element högst en invers.

Om A och B är mängder så är en <u>relation</u> R från A till B en delmängd av $A \times B$, dvs $R \subseteq A \times B$ innehåller alla (x,y) där xRy. Om $A = B$ är R en relation <u>på A</u>.

Exempel: En relation på $\{X, Y, Z\}$ kan ges av

$x \backslash y$	X	Y	Z
X	•		•
Y		•	•
Z	•		

En relation R på en mängd kallas

- <u>reflexiv</u> om xRx
- <u>symmetrisk</u> om $xRy \Rightarrow yRx$
- <u>antisymmetrisk</u> om $xRy \wedge yRx \Rightarrow y = x$
- <u>transitiv</u> om $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Likhetsrelationen $xRy \Leftrightarrow x = y$ har alla egenskaperna (oavsett mängd), olikhetsrelationen $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ har alla utom symmetri.

En <u>ekvivalensrelation</u> är reflexiv, symmetrisk, och transitiv. För en ekvivalensrelation R betecknar vi $[x] = \{y : xRy\}$ och kallar detta för <u>ekvivalensklassen</u> som innehåller x.

En ekvivalensrelation ger upphov till en <u>partition</u>, dvs en uppdelning av mängden A i disjunkta delmängder $B_1, \ldots, B_n$ så att $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = A$.

Ekvivalensrelationer är abstraktioner av $=$.

Motsvarande abstraktion av $\leq$ ges av <u>partiella ordningar</u>, som är relationer som är reflexiva, antisymmetriska, och transitiva.

Exempel: $P(A)$ är en partiellt ordnad mängd med avseende på relationen $xRy \Leftrightarrow x \subseteq y$, men den är inte <u>totalt ordnad</u> eftersom det inte alltid gäller att minst en av xRy och yRx är sann.

I en partiellt ordnad mängd $(A, \leq)$ kallas m för ett <u>minimalt element</u> om $a \leq m \Rightarrow a = m$. Om $m \leq a$ för alla a kallas m för ett <u>minsta element</u>.

Exempel: I $(P(A), \subseteq)$ är $\emptyset$ ett minsta element (och ett minimalt element), men i $(P(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$ saknas minsta element (men alla mängder med ett enda element är minimala).

En associativ operator kan upprepas genom att använda en större variant: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

För summor och produkter används $\sum$ och $\prod$.

Exempelvis är $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

I en <u>aritmetisk summa</u> är skillnaden mellan två konsekutiva termer konstant: $\sum_{j=0}^{n} a_j$ är en aritmetisk summa precis då $a_j = A + jB$, och då är $\sum_{j=0}^{n} a_j = (n+1)A + B\frac{n(n+1)}{2}$.

I en <u>geometrisk summa</u> är kvoten mellan konsekutiva termer konstant: $\sum_{j=0}^{n} a_j$ är en geometrisk summa precis då $a_j = AB^j$, och då är $\sum_{j=0}^{n} a_j = A\frac{B^{n+1}-1}{B-1}$.