Tentamen i TMV200 Diskret matematik 2019-04-25 kl. 14:00–18:00

Examinator: Mårten Wadenbäck
Telefonvakt: Kristian Holm, telefon: x5325
Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 30 poäng, och för betyget fem krävs minst 40 poäng. Resultatet meddelas i LADOK senast 2019-05-20. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

1. Avgör huruvida följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} p \to (q \lor r) \\ q \to (r \land \neg p) \\ r \lor p \\ \neg(q \to p) \\ \hline r \to p \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara i så fall varför. Om argumentet inte är giltigt, ge i så fall ett motexempel. (6p)

2. Visa att det för alla $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Eventuellt hjälper det att veta att $(n+1)^2(n+4) = n^3 + 6n^2 + 9n + 4$. (7p)

3. Betrakta vanlig multiplikation av talen i mängden $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Visa att om $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ och u^2 är ett heltal så är $u\sqrt{3}$ eller u självt ett heltal. (1p)

(b) Är $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ sluten under multiplikation, dvs gäller det för alla u och v i $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ att även produkten uv tillhör $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? (2p)

(c) Har $7 + 4\sqrt{3}$ någon multiplikativ invers i $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? (2p)

(d) Visa att om $a + b\sqrt{3}$ har en multiplikativ invers i $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ så är $\text{sgd}(a, b) = 1$. (2p)

Bevis eller motexempel krävs i varje deluppgift.

4. Till matvraksföreningens högtidliga årssammankomst levererades tre gånger fler tonfiskbaguetter än krusbärspajer. Efter att de 71 närvarande medlemmarna ätit lika många tonfiskbaguetter vardera fanns det en enda tonfiskbaguett kvar. En av deltagarna ville inte ha några krusbärspajer (den utlovade ostbrickan var tydligen mer lockande), och när de övriga deltagarna ätit lika många krusbärspajer vardera fanns det 28 krusbärspajer kvar. Bestäm minsta möjliga antalet krusbärspajer som kan ha funnits från början. (7p)

Var god vänd!

5. Låt $D(n)$ beteckna största äkta delaren till $n \in \mathbb{N}$ (dvs den största delaren till n förutom n själv). Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\mathbb{N}$ som definieras genom

$$a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad D(a) = D(b).$$

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)

(b) Ange alla element som tillhör samma ekvivalensklass som 98. (2p)

6. Givet bokstäverna i ordet MURMELDJUR, hur många olika "ord" av längd sju kan bildas om

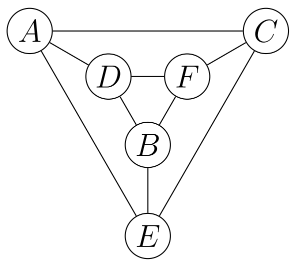
(a) det inte finns några ytterligare krav? (2p)

(b) eventuella dubbletter som används måste stå intill varandra? (2p)

(c) LEMUR måste förekomma i alla orden? (2p)

Svaren i denna uppgiften behöver inte förenklas.

7. Låt G vara grafen i figuren nedan:



(a) Ge exempel på en inducerad delgraf till G som är ett träd och har tre noder. (2p)

(b) Visa att G är en *tripartit* graf, dvs att nodmängden kan partitioneras i tre disjunkta delmängder så att ingen kant går inom respektive delmängd. På hur många sätt kan indelningen ske? (2p)

(c) Vad är minsta antalet kanter som behöver plockas bort för att grafen skall få en Eulerväg? (2p)

(d) Vad är minsta antalet kanter som behöver läggas till för att grafen skall få en Eulercykel? (1p)

Tänk på att alltid motivera dina svar ordentligt! Endast svar ger inte poäng.

8. Låt som vanligt $\Phi(n)$ beteckna Eulers Φ-funktion.

(a) Beräkna $\Phi(980)$. (2p)

(b) Bestäm det minsta positiva talet x som uppfyller $x = 3^{2019} \mod 980$. Glöm inte att kontrollera förutsättningarna för eventuella satser du använder. (3p)

Lycka till!