

1.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kan ses som två linjer som sträcker ut sig genom  $\mathbb{R}^3$ . Om man varierar argumentet till funktionen så kan detta ses som att röra sig utmed denna linje. Att  $f(r)$  och  $g(l)$  är lika för några  $r$  och  $l$  betyder att linjerna i någon punkt skär varandra.

- Linje A skär alla punkter i sig själv.  $\rightarrow$  Reflexiv.
- Att linje A skär linje B implicerar att linje B skär linje A.  $\rightarrow$  Symmetrisk.  
 $\rightarrow$  Inte antisymmetrisk.
- Att linje A skär linje B och att linje B skär linje C implicerar inte att linje A skär linje C. Detta kan visas genom exempel.  $\rightarrow$  Inte transitiv.

2. Vi testar för reflexivitet, antisymmetri och transitivitet.

a) Det är alltid sant att  $a \leq a$ . Den är aldrig symmetrisk för olika  $a$  och  $b$ :  $a \neq b, a < b \iff b \not< a$ . Transitiv ty  $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ . Det är en total ordning då det för alla olika  $a$  och  $b$  antingen gäller att  $a \leq b$  eller  $b \leq a$ .

b) Delbarhet är analogt med ovan, fast har luckor i sig jämfört med  $\leq$  operatör och är därför inte en total ordning.

3.

a) Rita upp ett koordinatsystem med två axlar med från och med -10 till och med 10 på båda axlarna. Varje punkt kan ses som ett element.

b) Antalet element i  $A \times A$  ger  $21 \cdot 21 = 441$  element så  $|P(A \times A)| = 2^{441}$

c) Om ni målat upp ett klassiskt x,y-koordinatsystem, skugga allt under x-axeln.

4. a) Basfall redan angivet genom  $a_0 = 0$ .

Induktionsantagande:  $a_n \leq 1$

Bevis:  $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} \leq \frac{1+3}{4} = 1$

b) Basfall  $a_0 = 0 < a_1 = 3/4$ .

Induktionsantagande:  $a_n < a_{n+1}$

Bevis:  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+3}{4} > \frac{a_n+3}{4} = a_{n+1}$

5. Använd Eulers algoritim för att få fram  $SGD(43, 20)$  samt hur 43 och 20 kommer kunna återrekonstrueras. Rekonstruera sedan en enklare diofantisk ekvation baklänges. Notera att om  $SGD(43, 20)$  inte hade delat tian i vår diofantiska ekvation hade den varit olöslig.  $SGD(43, 20) = 1 = 3 - 2 = (43 - 20 \cdot 2) - (20 - 3 \cdot 6) = (43 - 20 \cdot 2) - (20 - (43 - 20 \cdot 2)) = 43 - 2 \cdot 20 - 20 + 6 \cdot 43 - 12 \cdot 20 = 7 \cdot 43 - 15 \cdot 20$

Kontrollera att  $7 \cdot 43 - 15 \cdot 20 = 1$ .

Vi multiplicerar med 10 för att få en speciell lösning.

$$x_0 = 7 \cdot 10 = 70$$

$$y_0 = -15 \cdot 10 = -150$$

Den allmänna lösningen blir för  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$x = 70 + n \cdot 20$$

$$y = -150 - n \cdot 43$$

Då  $n = 0$  skiljer sig  $x$  och  $y$  minst från noll. Vi godtar därför detta som den allmänna lösningen som är lättast att skriva.

Bonusuppgift lösningsförslag: `<http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.tower.hanoi.html>`