

Linjärkombinationer, baser

Definition 1 Låt \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 vara två vektorer. En vektor \mathbf{v} på formen

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ kallas då för en **linjärkombination** av \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 . Mer allmänt så kallas en vektor \mathbf{v} på formen

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i,$$

där $a_i \in \mathbb{R}$ för en linjärkombination av $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 1 Låt $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$ och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$. Då är en linjärkombination av \mathbf{e}_x och \mathbf{e}_y en vektor

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vi ser här alltså att varje 2-vektor är en linjärkombination av \mathbf{e}_x och \mathbf{e}_y . Om vi istället tar \mathbf{e}_x och \mathbf{e}_y i tre dimensioner så får vi

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alla linjärkombinationer är i det här fallet alltså vektorerna i xy -planet (de som har tredje koordinaten lika med noll).

Definition 2 Vi säger att vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ är **linjärt oberoende** om enda lösningen $\{a_i\}$ till

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är **linjärt beroende**.

Exempel 2 Vektorerna \mathbf{e}_x och \mathbf{e}_y är linjärt oberoende ty

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

vilket endast har lösningen $a = b = 0$.

Proposition 1 Två vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ är linjärt beroende om och endast om de är parallella.

Bevis. Antag första att \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är linjärt beroende, d v s det finns $(a, b) \neq (0, 0)$ sådana att $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Vi kan anta att $a \neq 0$. Det ger

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{b}{a}\mathbf{v}_2$$

och alltså är \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 parallella.

Omvänt så antag att \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är parallella. Då är $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$ för något $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ så

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2$$

vilket visar att \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är linjärt beroende. \square

På samma sätt kan man också visa följande mer generella resultat:

Proposition 2 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.*

Exempel 3 *Tag $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i tre dimensioner. Då är*

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

så $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. Dessutom får vi t ex att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$$

genom att lösa ut \mathbf{v}_1 .

Definition 3 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ säges utgöra en bas om varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ på ett unikt sätt. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ är en bas och*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att (a_1, a_2, \dots, a_n) är \mathbf{v} 's **koordinater i basen** $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 4 *Vi har tidigare infört basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ för alla 2-vektorer och tillhörande koordinatsystem. Men man kan ta vilka två vektorer som helst som är $\neq \mathbf{0}$ och ej parallella och låta dem utgöra en bas. Låt t ex $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Då är*

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{e}_y$$

så i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$ har \mathbf{v} koordinater $(1, 0)$. Vi har också

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y,$$

så \mathbf{e}_x har koordinaterna $(1/2, -1/2)$ i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$.

Följande proposition ger ett alternativt villkor för en mängd vektorer att utgöra en bas.

Proposition 3 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ utgör en bas om och endast om de är linjärt oberoende och varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av dem.*

Anmärkning 1 *Vi har tidigare använt begreppet dimension utan att ge någon formell definition. En naturlig definition av begreppet är helt enkelt att låta dimensionen vara antalet element i en bas. Detta stämmer överens med vår intuitiva uppfattning av dimension för planet (som alltså har 2 basvektorer) och rummet (som har 3 basvektorer).*

Skalärprodukt

Definition 4 *Låt \mathbf{u} och \mathbf{v} vara två vektorer och låt α vara minsta vinkeln mellan dem. Då definierar vi skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ genom*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha.$$

Exempel 5 *Vi tittar på följande två extrema exempel:*

1. *Låt \mathbf{u} vara vilken vektor som helst. Då är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{u}|^2.$$

2. *Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Då gäller att*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0$$

vilket är ekvivalent med att \mathbf{u} och \mathbf{v} är ortogonala (vinkelräta).

Observera att skalärprodukten av två vektorer är ett reellt tal, inte en vektor. Skalärprodukt är alltså ingen operator på mängden av vektorer. Skalärprodukten uppfyller följande räkneregler:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, $c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

De två första följer direkt från definitionen, men den tredje är ganska komplicerad (se boken sidan 39). Skalärprodukten är enkel att räkna ut om man har vektorerna givna i koordinater m a p en ON-bas.

Sats 1 *Antag att \mathbf{u} och \mathbf{v} har koordinaterna $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ i en ON-bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Då gäller att*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Bevis. Vi får m h a räknereglerna ovan och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ att

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2) \cdot (x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 x_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + y_1 x_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + y_1 y_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{aligned}$$

□

Exempel 6 Vi vill beräkna vinkeln mellan vektorerna med koordinaterna i någon ON-bas givna av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Från $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha$ får vi

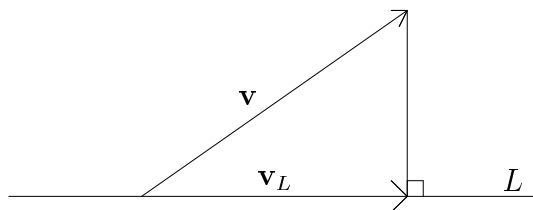
$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Alltså är $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Anmärkning 2 Motsvarande resultat gäller i 3 (och även i högre) dimensioner. Det är mycket viktigt att basen är ortonormerad. Titta en gång till på beviset och övertyga dig om detta.

Definition 5 Låt \mathbf{v} vara en vektor och L en linje. Den **ortogonala projektionen** av \mathbf{v} på L , \mathbf{v}_L , definieras som den vektor som är parallell med L och sådan att

$$\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = 0.$$



Sats 2 Låt \mathbf{e} vara en enhetsvektor parallell med linjen L . Den ortogonala projektionen av \mathbf{v} på L ges av

$$\mathbf{v}_L = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}.$$

Bevis. Vi vet att $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e}$ för något $t \in \mathbb{R}$ eftersom \mathbf{e} och \mathbf{v}_L båda är parallella med L . Vidare är $0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L)$ per definition av ortogonal projektion. Vi får

$$0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_L = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot t\mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t.$$

Alltså är $t = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$. □

Exempel 7 Bestäm den ortogonala projektionen av en godtycklig vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ på linjen parallell med $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normering av \mathbf{v} ger

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Projektionen av en vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ges alltså enligt satsen ovan av

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_L &= \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e} \right] \mathbf{e} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser av detta att denna projektion är en linjär avbildning och detta gäller för ortogonala projektioner i allmänhet. (Visa detta genom att imitera det här exemplet med \mathbf{v} utbytt mot en godtycklig vektor.)