

# MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2006-01-13.

Tentamen i Matematik IT del B, TMA245b, 2006-01-13.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakter: Elin Götmark & David Rydh, 0762-721860.

---

**OBS:** Ange personnummer och namn på omslaget.  
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.  
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.  
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

med hjälp av Gausselimination.

(6p)

2. Bestäm avståndet från punkten  $(1, 2, 0)$  till linjen

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

(6p)

3. Bestäm ekvationen för planet genom origo som innehåller linjen

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

(6p)

4. Bestäm ON-matris  $P$  och diagonalmatris  $D$  sådana att  $A = PDP^t$  då

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Tips: Ett av egenvärdena är 1.

(7p)

(vgv)

5. Är vektorerna  $\mathbf{v}_1 = (3 \ 2 \ -1)^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1 \ 6 \ 2)^t$  och  $\mathbf{v}_3 = (9 \ 2 \ 4)^t$  linjärt oberoende? (6p)
6. Låt  $A$  vara matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen som består av rotation  $\frac{\pi}{4}$  radianer kring  $y$ -axeln i den riktning som bestäms av att positiva  $x$ -axeln vrids mot positiva  $z$ -axeln. Låt  $B$  vara matrisen för spegling i  $yz$ -planet. Beräkna matrisen för den linjära avbildning som först roterar enligt  $A$  och sedan speglar enligt  $B$ . (6p)
7. Låt  $R_n$  vara antalet rävar i England år  $n$  och  $K_n$  antalet kaniner i England år  $n$ . Vi antar att dessa är relaterade rekursivt enligt

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{13}{30}R_n + \frac{1}{15}K_n \\ K_{n+1} &= -\frac{14}{3}R_n + \frac{47}{30}K_n \end{aligned}$$

för alla  $n \geq 0$ .

- (a) Bestäm en matris  $A$  sådan att

$$\begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Matrisen ni bestämde (om ni gjorde rätt) har egenvärdena 0.9 respektive 1.1 med motsvarande egenvektorer  $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  respektive  $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ . Vad händer med populationerna av rävar och kaniner om det från början finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar? Vad händer om det från början inte finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar? (6p)

8. Låt  $A$  vara matrisen för den linjära avbildning i  $\mathbb{R}^3$  som är ortogonal projektion på det plan genom origo som spänns upp av vektorerna  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$ .
- (a) Vad har  $A$  för egenvärden?
- (b) Ge tre linjärt oberoende egenvektorer till  $A$ .

Svaren ska motiveras. (7p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 25 januari. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL!

Stefan.