MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2005-03-18.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Marcus Better, 0739-779268.

OBS: Ange personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. (a) För vilka värden på talet a gäller det att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ **inte** har unik lösning om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -a & 1 \\ 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Ge exempel på ett tal a och en vektor $\mathbf{b}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har oändligt många lösningar. (7p)

2. Beräkna (det minsta) avståndet från punkten $P = (3, 1, 2)$ till planet

$$x + y + 2z + 3 = 0.$$

(6p)

3. Bestäm ekvationen (på parameterfri form) för ett plan som innehåller linjen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}.$$

(6p)

4. En vektor $\mathbf{x}$ har koordinaterna $(1, 1, 1)$ i standardbasen. Bestäm dess koordinater i den högerorienterade ON-basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ där

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{och } \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$$

(uttryckt i standardbasen). Kontrollera också att du fått rätt svar (kontrollen ska redovisas och motiveras). (6p)

5. Låt x_k vara antalet unga talgoxar i oktober år k (d v s de som är födda under det gångna året) och låt y_k vara antalet vuxna talgoxar i oktober år k (d v s de som är åtminstone 1 år gamla). Av de vuxna talgoxarna är det 70% som överlever till nästa oktober och av de unga är det endast

20% som överlever till nästa oktober. Varje vuxen individ producerar i genomsnitt 1.4 ungar kommande sommar som överlever till oktober. (Det behövs som bekant två talgoxar för att producera ungar, så detta betyder att varje par producerar 2.8 ungar i genomsnitt.) För de unga fåglarna gäller det att de bara producerar i genomsnitt 0.1 ungar per individ sommaren därpå. (Många som dör under vintern plus bristande erfarenhet gör att genomsnittet blir lågt.)

(a) Låt $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. Gör en matrismodell som beskriver relationen mellan $\mathbf{v}_{k+1}$ och $\mathbf{v}_k$, d v s bestäm en matris så att

$$\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k.$$

(b) Om man beräknar egenvärdena för matrisen A så finner man att dessa är $\lambda_1 \approx 1.008$ och $\lambda_2 \approx -0.208$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{u}_1 \approx \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_2 \approx \begin{pmatrix} -4.54 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Två frågor angående utvecklingen av talgoxpopulationen i "det långa loppet" (om man förutsätter att modellen fortsätter gälla): Vad händer med utvecklingen av antalet talgoxar? Hur stor andel av talgoxarna i oktober kommer att vara unga fåglar? (7p)

6. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen i $\mathbb{R}^3$ som svarar mot spegling i planet $x + y + 2z = 0$. (6p)

7. Två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ har samma längd. Vinkeln α mellan dessa uppfyller att $\cos\alpha = 1/3$. Vi bildar två linjärkombinationer av dessa

$$\mathbf{u} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \text{ och } \mathbf{v} = c\mathbf{x} + d\mathbf{y},$$

där a, b, c och d är reella tal.

(a) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (uttryckt i a, b, c och d).

(b) Ge exempel på konstanter a, b, c och d sådana att alla fyra är skilda från noll samt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta. (6p)

8. Beräkna den spetsiga vinkeln mellan två rymddiagonaler i en kub. (En rymddiagonal är den sträcka som går från ett hörn inuti kuben till det motsatta hörnet.) Observera att det finns fyra stycken rymddiagonaler. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 1 april. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.