Linjärkombinationer, baser

Definition 1 *Låt* $\mathbf{v}_1$ *och* $\mathbf{v}_2$ *vara två vektorer. En vektor* $\mathbf{v}$ *på formen*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ *kallas då för en* **linjärkombination av** $\mathbf{v}_1$ *och* $\mathbf{v}_2$. *Mer allmänt så kallas en vektor* $\mathbf{v}$ *på formen*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i,$$

där $a_i \in \mathbb{R}$ *för en linjärkombination av* $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 1 *Låt* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$. *Då är en linjärkombination av* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *en vektor*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vi ser här alltså att varje 2-vektor är en linjärkombination av $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$. *Om vi istället tar* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *i tre dimensioner så får vi*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alla linjärkombinationer är i det här fallet alltså vektorerna i xy-planet (de som har tredje koordinaten lika med noll).

Definition 2 *Vi säger att vektorerna* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *är* **linjärt oberoende** *om enda lösningen* $\{a_i\}$ *till*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. *Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är* **linjärt beroende**.

Exempel 2 *Vektorerna* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *är linjärt oberoende ty*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

vilket endast har lösningen $a = b = 0$.

Proposition 1 *Två vektorer* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ *är linjärt beroende om och endast om de är parallella.*

Bevis. Antag först att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt beroende, d v s att det finns tal a, b med $(a, b) \neq (0, 0)$ sådana att $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Vi kan anta att $a \neq 0$. Det ger

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{b}{a}\mathbf{v}_2$$

och alltså är $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ parallella.
Omvänt så antag att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är parallella. Då är $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$ för något $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ så

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2$$

vilket visar att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt beroende. □

På samma sätt kan man också visa följande mer generella resultat:

Proposition 2 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.*

Exempel 3 *Tag $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i tre dimensioner. Då är*

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

så $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. Dessutom får vi t ex att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$$

genom att lösa ut $\mathbf{v}_1$.

Definition 3 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ säges utgöra en* **bas** *om varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ på ett unikt sätt. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en bas och*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är $\mathbf{v}$:s **koordinater i basen** $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 4 *Vi har tidigare infört basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ för alla 2-vektorer och tillhörande koordinatsystem. Men man kan ta vilka två vektorer som helst som är $\neq \mathbf{0}$ och ej parallella och låta dem utgöra en bas. Låt t ex $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Då är*

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{e}_y$$

så i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$ har $\mathbf{v}$ koordinater $(1, 0)$. Vi har också

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y,$$

så $\mathbf{e}_x$ har koordinaterna $(1/2, -1/2)$ i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$.

Följande proposition ger ett alternativt villkor för en mängd vektorer att utgöra en bas.

Proposition 3 *Vektorerna* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *utgör en bas om och endast om de är linjärt oberoende och varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av dem.*

Anmärkning 1 *Vi har tidigare använt begreppet dimension utan att ge någon formell definition. En naturlig definition av begreppet är helt enkelt att låta dimensionen vara antalet element i en bas. Detta stämmer överens med vår intuitiva uppfattning av dimension för planet (som alltså har 2 basvektorer) och rummet (som har 3 basvektorer).*

Skalärprodukt

Definition 4 *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer och låt* α *vara minsta vinkeln mellan dem. Då definierar vi* **skalärprodukten** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *genom*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha.$$

Exempel 5 *Vi tittar på följande två extrema exempel:*

1. *Låt* $\mathbf{u}$ *vara vilken vektor som helst. Då är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{u}|^2.$$

2. *Antag att* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. *Då gäller att*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0$$

vilket är ekvivalent med att $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är ortogonala (vinkelräta).*

Observera att skalärprodukten av två vektorer är ett reellt tal, inte en vektor. Skalärprodukt är alltså ingen operator på mängden av vektorer. Skalärprodukten uppfyller följande räkneregler:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),\ c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

De två första följer direkt från definitionen, men den tredje är ganska komplicerad (se boken sidan 39). Skalärprodukten är enkel att räkna ut om man har vektorerna givna i koordinater m a p en ON-bas:

Sats 1 *Antag att* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *har koordinaterna* $\binom{x_1}{y_1}$ *respektive* $\binom{x_2}{y_2}$ *i en ON-bas* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. *Då gäller att*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Bevis. Vi får m h a räknereglerna ovan och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ att

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) \cdot (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) \\
&= x_1x_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + y_1x_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + y_1y_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\
&= x_1x_2 + y_1y_2.
\end{aligned}$$

□

Exempel 6 *Vi vill beräkna vinkeln mellan vektorerna med koordinaterna i någon ON-bas givna av* $\binom{2}{1}$ *respektive* $\binom{3}{4}$.
Från $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha$ *får vi*

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

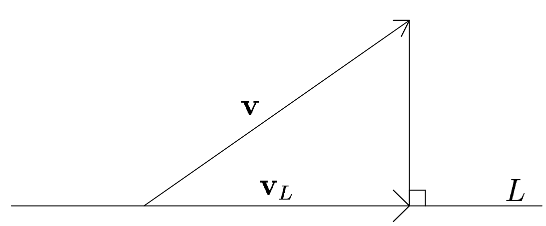
Alltså är $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Anmärkning 2 *Motsvarande resultat gäller i 3 (och även i högre) dimensioner. Det är mycket viktigt att basen är ortonormerad. Titta en gång till på beviset och övertyga dig om detta.*

Det finns ett par typer av linjära avbildningar som är speciellt intressanta och viktiga. En av dessa är vissa projektioner. Vi inleder med att studera (ortogonal) projektion på en linje.

Definition 5 *Låt* $\mathbf{v}$ *vara en vektor och* L *en linje. Den* **ortogonala projektionen** *av* $\mathbf{v}$ *på* L, $\mathbf{v}_L$, *definieras som den vektor som är parallell med* L *och sådan att*

$$\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = 0.$$



Sats 2 *Låt* $\mathbf{e}$ *vara en enhetsvektor parallell med linjen* L. *Den ortogonala projektionen av* $\mathbf{v}$ *på* L *ges av*

$$\mathbf{v}_L = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}.$$

Bevis. Vi vet att $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e}$ för något $t \in \mathbb{R}$ eftersom $\mathbf{e}$ och $\mathbf{v}_L$ båda är parallella med L. Vidare är $0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L)$ per definition av ortogonal projektion. Vi får

$$0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_L = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot t\mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t.$$

Alltså är $t = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$. □

Exempel 7 *Bestäm den ortogonala projektionen av en godtycklig vektor* $\binom{x}{y}$ *på linjen parallell med* $\mathbf{v} = \binom{1}{1}$.
Normering av $\mathbf{v}$ *ger*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Projektionen av en vektor $\binom{x}{y}$ *ges alltså enligt satsen ovan av*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_L &= \left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\mathbf{e}\right]\mathbf{e} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ser av detta att denna projektion är en linjär avbildning och detta gäller för ortogonala projektioner i allmänhet. (Visa detta genom att imitera det här exemplet med $\mathbf{v}$ *utbytt mot en godtycklig vektor.)*