Sammansättning

Låt f och g vara två linjära avbildningar med motsvarande matriser A och B. Vi får då

$$f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = f(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x},$$

så att sammansättningen är också en linjär avbildning och den har matrisen AB.

Anmärkning 1 *Det faktum att $AB \neq BA$ i allmänhet ger att i allmänhet är $f \circ g \neq g \circ f$.*

Exempel 1 *Låt f och g vara rotation kring origo i planet med s respektive t radianer moturs. Då är deras motsvarande matriser*

$$A = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \text{ respektive } B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Sammansättningen $f \circ g$ $(= g \circ f)$ är ju rotation $s + t$ radianer moturs så vi måste ha

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(s+t) & -\sin(s+t) \\ \sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix}.$$

Men samtidigt så får vi genom att multiplicera matriserna att

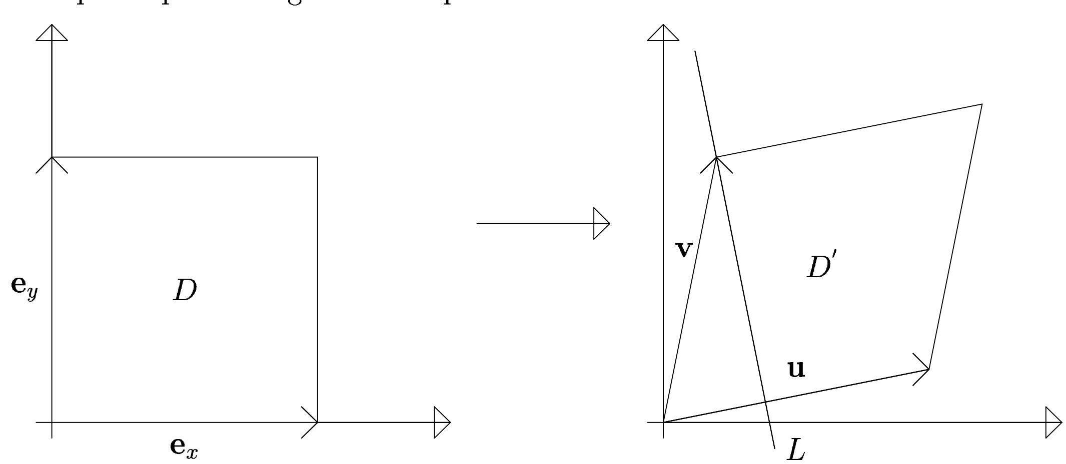
$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s \cos t - \sin s \sin t & -\sin s \cos t - \cos s \sin t \\ \sin s \cos t + \cos s \sin t & \cos s \cos t - \sin s \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Från detta får vi de trigonometriska identiteterna

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \sin(s+t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

Determinant

Låt $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Betraktad som linjär avbildning så avbildar M enhetskvadraten på en parallellogram som spänns av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$



där $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$. Arean av parallellogrammen D', $A(D')$, ges av

$$A(D') = |\mathbf{u}||\mathbf{v}_L|$$

där $\mathbf{v}_L$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen L som är ortogonal mot $\mathbf{u}$. En riktningsvektor för L av längd 1 ges av

$$e = \pm\frac{1}{|\mathbf{u}|}\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}.$$

(Tecknet beror på 'orienteringen' av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.) Vi får alltså

$$\begin{aligned} A(D') &= |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}_L| = |\mathbf{u}|\,|(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}|\,|\mathbf{e}| \\ &= |\mathbf{u}|\left|\frac{1}{|\mathbf{u}|}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|. \end{aligned}$$

Definition 1 *Låt* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. *Vi definierar då determinanten av* M, $\det M$, *som*

$$\det M = ad - bc.$$

Vi inför också beteckningen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vad händer om vi istället tar en rektangel med sidorna $s\mathbf{e}_x$ respektive $t\mathbf{e}_y$? Jo bilden kommer då att vara parallellogrammen som spänns upp av $s\mathbf{u}$ och $t\mathbf{v}$. Detta är samma parallellogram man får om man avbildar enhetskvadraten med matrisen $M' = \left(\begin{smallmatrix} sa & tb \\ sc & td \end{smallmatrix}\right)$ så att parallellogrammen kommer att ha arean

$$|\det M'| = |sa\cdot td - tb\cdot sc| = |st|\cdot|ad - bc| = st|\det M|.$$

Vi får alltså

$$\frac{\text{Arean av bilden}}{\text{Arean av rektangeln}} = \frac{|st|\cdot|\det M|}{|st|} = |\det M|.$$

Man kan visa att samma resultat gäller för mer komplicerade områden och vi har följande lite oprecisa sats.

Sats 1 *Antag att* D *är ett "snällt och hyggligt" område i planet och låt* D' *vara bilden av* D *under den linjära avbildningen given av matrisen* M. *Då gäller att*

$$\frac{\textit{Arean av } D'}{\textit{Arean av } D} = |\det M|.$$

Determinantens absolutbelopp ger alltså areaförändringen hos en linjär avbildning.

Exempel 2 *Låt M vara matrisen för en rotation t radianer moturs. Då får vi med hjälp av definitionen av determinant och trigonometriska ettan att*

$$\det M = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Alltså förändrar en rotation inte arean (precis som vi misstänkte, eller?). Låt nu istället M vara matrisen för skalning med en faktor s. Då är

$$\det M = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2,$$

eller med andra ord så är 'areaskalan kvadraten av längdskalan'.

Följande räkneregler för determinant kan man lätt visa genom direkt räkning.

1. $\det \begin{pmatrix} c\mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$
2. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$
3. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v}+\mathbf{w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$
4. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0$
5. $\det M = \det M^t$

Här betyder $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$ den matris som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som sina kolonner.

Definition 2 *Determinanten för en 3×3-matris ges av*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Vi ska senare visa att determinanten för en 3×3-matris spelar samma roll som determinanten för en 2×2-matris. Vi har bl a

Sats 2 *Antag att D är ett "snällt och hyggligt" område i rummet och låt D' vara bilden av D under den linjära avbildningen given av matrisen M. Då gäller att*

$$\frac{\textit{Volymen av } D'}{\textit{Volymen av } D} = |\det M|.$$

Med lite större ansträngning än för 2×2-matriser kan man visa att också determinanten för 3×3-matriser uppfyller räknereglerna ovan. Ett exempel på hur man kan utnyttja dem:

Exempel 3 *Vi använder reglerna 3. och 4. i följande räkning:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3+2 \\ 4 & 1 & 4+1 \\ 6 & -2 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Mer generellt så antag att 3:e kolonnen är en linjärkombination av de två första. Vi får då på samma sätt som i exemplet

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & c\mathbf{u}+d\mathbf{v}\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & c\mathbf{u}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & d\mathbf{v}\end{pmatrix} \\ &= c\cdot\det\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{u}\end{pmatrix} + d\cdot\det\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{v}\end{pmatrix} = 0+0=0.\end{aligned}$$

Detta stämmer ju väl överens med satsen om volymförändring, ty om 3:e kolonnen är en linjärkombinaton av de två andra så kommer de att ligga i ett plan och volymen blir därmed 0.
Ett annat sätt att formulera detta på är att tre vektorer i rummet ligger i ett plan om och endast om matrisen med vektorerna som kolonner har determinanten lika med 0.
Satserna om area- respektive volymförändring ger att

$$|\det AB| = |\det A||\det B|,$$

eftersom förändringen för den sammansatta funktionen AB måste vara produkten av de för A och B. Man kan visa (t ex genom direkt räkning) att i själva verket gäller att

$$\det AB = \det A \det B,$$

Invers

Definition 3 Identitetsmatrisen *(enhetsmatrisen) av storlek n, $I = I_n$, är den $n \times n$-matris som har ettor på diagonalen och nollor för övrigt.*

Den kallas för identitetsmatris eftersom den verkar som identitet vid multiplikation, d v s

$$A = I_nA = AI_n,$$

för alla $n \times n$-matriser A.

Definition 4 *Låt A vara en kvadratisk matris. En matris B kallas för* **inversen till** A *om*

$$AB = BA = I$$

Om en sådan matris existerar så betecknas den A^{-1}.

Exempel 4 *Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ och antag att $\det A \neq 0$. Då är*

$$B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

en invers till A vilket man lätt kontrollerar genom att multiplicera A och B.

Vi såg i exemplet att om A är en 2×2-matris och $\det A \neq 0$ så har A en invers. Omvänt så har vi

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}$$

så

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Detta ger att $\det A \neq 0$ är nödvändigt för att A^{-1} ska existera. Det sista argumentet gäller även för 3×3-matriser (och även godtycklig storlek i själva verket). Vi har alltså för 2×2-matriser visat att

$$A^{-1} \text{ existerar} \Longleftrightarrow \det A \neq 0.$$

Detta påstående gäller även för godtycklig storlek vilket vi återkommer till senare.