

## Linjer, plan m m

### Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet  $Ax + By + C = 0$  eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

- (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien  $r$ , d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.
- (b) Ta nu istället en cirkel med centrum i en godtycklig punkt  $(x_0, y_0)$ .
- (c) Låt  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Bestäm bilden av en cirkel med centrum i origo under den linjära avbildningen som ges av  $A$ . Bestäm en parametrisering och en ekvation för bilden.
- (d) (Om ni hinner) Bestäm en parametrisering av kurvan  $x^4 + y^4 = r^2$ . Eventuellt kan man ha nytta av funktionen

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t = 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

2. Lös uppgift 2.58a i boken. Låt de 9 procenttalen utgöra en  $3 \times 3$ -matris  $A$  och antag att en 3-vektor  $\mathbf{v}$  innehåller antalet i storstad, tätort respektive landsbygd (efter 0 år). Hur många finns det i de tre olika kategorierna efter 1 år? Efter 2 år? Efter  $n$  år? (Inga siffror. Bara bokstäverna  $A$ ,  $\mathbf{v}$  och  $n$ .)
3. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en  $m \times n$ -matris med en  $n \times p$ -matris?
4. Antag att vi är i  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Det finns olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. (Tänk geometriskt!)

- (b) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Det finns återigen olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa.

5. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.
- (a) Vad händer om man multiplicerar en över-(under-)triangulär matris med en annan över-(under-)triangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär?
- (b) Visa att (nästan) varje  $2 \times 2$ -matris  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  kan skrivas som en unik produkt  $A = LU$ , där

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Bestäm  $L$  och  $U$  uttryckt i  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och  $d$ . Vilka  $A$  kan inte skrivas som  $A = LU$ ?

- (c) (Om ni hinner) Visa att motsvarande resultat också gäller för varje  $3 \times 3$ -matris.

### Datorövningar

1. För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter  $t$ . Matlab gillar inte att man säger t ex "Låt  $t$  vara intervallet mellan 0 och  $2\pi$ ", utan man får nöja sig med ett antal punkter i  $[0, 2\pi]$ .
- (a) Kolla vad kommandona  $t = 0 : 10$ ,  $t = 0 : 0.2 : pi$  och  $t = 0 : pi/16 : pi$  ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentarer?
- (b) Vad händer om du t ex tar  $\cos t$  där  $t$  är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\arctan$  och  $\exp$  (Vad är den sista?) i intervallet  $[0, 10]$ .
- (c) Använd de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan  $x^4 + y^4 = r^2$ .
- (d) Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (för några olika  $k$ ) har 'deformerat' den. Prova gärna också att t ex rotera den.
2. Lös uppgift 2.58b i boken. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 år? (Vi gör antagandet att flyttningsmönstret är oförändrat hela tiden, vilket givetvis är totalt befängt i perspektivet 100000 år.) Testa med följande startfördelningar: alla bor i storstad, alla bor i tätort, alla bor på landsbygden samt lika många i de tre kategorierna.
3. Låt  $A$  vara en  $5000 \times 1000$ -matris,  $B$  en  $1000 \times 2000$ -matris samt  $\mathbf{x}$  en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten  $AB\mathbf{x}$ :  $(AB)\mathbf{x}$ ,  $A(B\mathbf{x})$  samt  $AB\mathbf{x}$  (dvs att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret tic/toc för att mäta tiden.) Kommentarer, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?

Uppgift 4 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 13 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!