Determinanter

Vi ska nu definiera determinant för godtyckligt stora kvadratiska matriser. Vi ger en 'konceptuell' definition som inte ger någon formel för att räkna ut den utan bara vilka egenskaper vi vill att den ska ha.

Definition 1 *En* **determinant** *är en funktion som till varje kvadratisk matris A ordnar ett tal*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

med följande egenskaper:

1. *Determinanten är en linjär funktion av varje kolonn.*
2. *Om två kolonner är lika så är determinanten noll.*
3. *Determinanten av identitetsmatrisen är ett.*

Anmärkning 1 *För att definitionen ska vara meningsfull måste man visa att determinanten existerar och att den är unik vilket inte är helt enkelt.*

Vi ska utifrån definitionen nu härleda ett effektivt sätt att beräkna determinanten.

Definition 2 *Vi definierar de* **elementära radoperationerna** *att vara följande tre typer:*

1. *Byte av två rader.*
2. *Multiplikation av en rad med ett tal skilt från noll.*
3. *Addition av en multipel av en rad till en annan rad.*

Från definitionen av determinant får vi direkt att determinanten inte alls påverkas av den tredje typen av elementära radoperationer och att den multipliceras med det aktuella talet för den andra typen. Om man byter två rader så ändras tecknet på determinanten. Det får man nästan omedelbart från definitionen (se bevis i avsnitt 4.1 i boken). Vi har alltså full kontroll på vad som händer med determinanten om man utför en elementär radoperation på en matris.
Man kan med viss möda bevisa att determinanten inte ändras om man transponerar matrisen, d v s

$$\det A = \det A^t.$$

Från detta får vi att alla regler som gäller för rader också gäller för kolonner. Man kan t ex addera en multipel av en kolonn till en annan kolonn utan att ändra determinanten.
Nu ska vi formulera två resultat som ger ett sätt att beräkna determinanten m h a elementära radoperationer. (Ett bevis i fallet $n = 3$ av följande sats finns i boken i avsnitt 4.3.)

Sats 1 *Antag att A är en övertriangulär (eller undertriangulär) matris med diagonalelement a_{ii}. Då gäller att*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Det är alltså enkelt att direkt beräkna determinanten för en triangulär matris. För en godtycklig matris gäller det helt enkelt att överföra den till en triangulär matris med hjälp av elementära radoperationer och om vi noterar vilka radoperationer vi gör så kan man då beräkna determinanten för en godtycklig (kvadratisk) matris. Man kan ju nu fråga sig om denna metod alltid lyckas, och det gör den:

Sats 2 *Varje $n \times n$-matris kan överföras till en övertriangulär matris m h a elementära radoperationer.*

Bevis. Vi gör ett induktionsbevis över n. För basfallet antag att $n = 2$ och att

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Om $a = 0$ så byt de två raderna och saken är klar. Om $a \neq 0$, så addera $-(c/a)$ gånger första raden till den andra. Då får vi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix}$$

och därmed är saken klar.
Antag nu att påståendet är sant för alla matriser av storlek $(n-1) \times (n-1)$. Vi ska visa att i så fall gäller det också för $n \times n$-matriser. Låt A vara en godtycklig $n \times n$-matris. Det räcker att visa att vi kan få hela första kolonnen utom första elementet till nollor, ty betrakta den del av matrisen A som består av de $n-1$ sista kolonnerna och de $n-1$ sista raderna. Denna kan överföras till en övertriangulär matris enligt induktionsantagandet och därmed kan även A det (eftersom vi hade nollor i första kolonnen förutom första elementet).
Om alla element i första kolonnen redan är noll så är saken klar. Antag nu att åtminstone ett av dem är skilt från noll. Byt eventuellt rader så att $a_{11} \neq 0$. Om man sedan adderar $-(a_{i1}/a_{11})$ gånger rad 1 till rad i för alla $2 \leq i \leq n$ så kommer raderna att få en nolla i första platsen och därmed är saken klar. $\square$

Exempel 1 *Vi använder dessa satser för att beräkna*

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix}$$

Vi använder metoden att addera en lämplig multipel av en rad som vi utnyttjade i beviset av förra satsen och får

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 20 = 180.$$

Linjära ekvationssystem

En **linjär ekvation** i n obekanta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en ekvation på formen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,$$

där a_i och b är fixa tal. Ett **linjärt ekvationssystem** med m ekvationer och n obekanta är helt enkelt m stycken sådana ekvationer och en lösning till ett sådant system är en n-tipel som satisfierar alla ekvationerna.
Titta t ex på det linjära ekvationssystemet

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 12 \\ 3y - 8z &= 14 \\ 20z &= 40 \end{aligned}\right.$$

Vi kan kort skriva detta som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A kallas för **koefficientmatris** och $\mathbf{b}$ kallas för **högerledsvektor**. Eftersom den sista ekvationen bara innehåller z så får vi från denna att $z = 2$. Sätter vi nu in detta i den andra ekvationen (som bara innehåller y och z) så får vi $3y = 14 + 16$, d v s $y = 10$. Om vi nu sätter in dessa värden i första ekvationen så får vi $x = 12 - 2 \cdot 10 - 3 \cdot 2 = -14$. Att det blev så här enkelt att bara successivt substiuera de olika variablerna hänger samman med att koefficientmatrisen är triangulär. Detta förfarande brukar kallas för **bakåtsubstitution**.
Antag nu att koefficientmatrisen inte är triangulär. Vi vet att vi kan göra den övertriangulär m h a elementära radoperationer och det härliga är att dessa inte ändrar lösningsmängden om man inkluderar högerledsvektorn som en extra kolonn. (Detta brukar kallas för **totalmatrisen**.) Att byta två rader har uppenbarligen ingen effekt och att multiplicera en rad med ett tal skilt från noll svarar enbart mot att multiplicera båda leden med talet (eftersom vi inkluderat högerledet som en extra kolonn). För den tredje elementära radoperatorn att addera en multipel av en rad till en annan så antag att

$$E_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0$$

och

$$E_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0$$

är två linjära ekvationer Vi ska visa att

$$\left\{\begin{array}{l} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{array}\right. \quad \text{och} \quad \left\{\begin{array}{l} E_1 = 0 \\ E_2 + kE_1 = 0 \end{array}\right.$$

har samma lösningar. Om det första ekvationssystemet är uppfyllt så är uppenbarligen det andra också det. Antag nu att det andra är det. Eftersom $E_1 = 0$ så får vi $E_2 = -kE_1 = 0$ så alltså är också det första systemet uppfyllt och därmed är saken klar. Vi har alltså visat att de elementära radoperationerna inte ändrar lösningsmängden.

Exempel 2 *Betrakta ekvationssystemet*

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 36 \\ 2x + 7y - 2z = 38 \\ 4x + 11y + 24z = 102. \end{cases}.$$

Vi får koefficientmatrisen utvidgad med högerledsvektorn till

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 36 \\ 2 & 7 & -2 & 38 \\ 4 & 11 & 24 & 102 \end{pmatrix}.$$

Med elementära radoperationer så får vi

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 36 \\ 2 & 7 & -2 & 38 \\ 4 & 11 & 24 & 102 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 7 & -2 & 38 \\ 4 & 11 & 24 & 102 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 12 & 54 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Detta triangulära system har vi redan löst m h a bakåtsubstitution och vi får $z = 2$, $y = 10$ *och* $x = -14$.

Detta sätt att överföra totalmatrisen till en övertriangulär matris och sedan bakåtsubstituera kallas för **Gausselimination**.
Om vi är i tre dimensioner så är en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

ekvationen för ett plan. Man kan då se lösningarna till ett ekvationssystem med tre ekvationer som skärningspunkterna mellan tre plan. Som vi såg på gruppövningen (alternativt titta i avsnitt 5.1.1 i boken) kan denna skärning vara ingenting, en punkt, en linje eller ett helt plan. Det är alltså inte alltid som i exemplet att man får en enda unik lösning. Observera dock att om alla element på diagonalen i den triangulära matrisen är skilda från noll så får vi en unik lösning från bakåtsubstitutionen för i varje steg bestäms nästa variabel unikt. Eftersom alla element på diagonalen är skilda från noll om och endast om determinanten för koefficientmatrisen A är skild från noll (Varför?) så får vi en unik lösning om $\det A \neq 0$.
Vad händer om $\det A = 0$? Vi tittar på följande exempel:

Exempel 3 *Betrakta totalmatrisen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & a & 4 \end{pmatrix},$$

där a är något tal. Vi ser här att koefficientmatrisen A har $\det A = 0$ *eftersom de två första kolonnerna är en multipel av varandra. Om vi utför Gausselimination så får vi*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & a & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a-9 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & a-9 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1+(a-9)/3 \end{pmatrix}.$$

Den sista ekvationen är nu $0 = 1 + (a-9)/3$ *som har lösning om och endast om konstanten* $a = 3$. *Det finns alltså bara lösning om* $a = 3$. *Antag nu* $a = 3$. *Då får vi*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $x_3 = -1/3$. *Sedan får vi inget villkor på* x_2 *eftersom vi har en nolla i andra diagonalelementet. Då är* x_2 *vad man brukar kalla en* **fri** *variabel och vi kan sätta* $x_2 = t$ *där* t *är en parameter. Den första ekvationen ger då* $x_1 = 1 - 2t - 3 \cdot (-1/3) = 2 - 2t$ *och vi får lösningen*

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = -1/3, \end{cases}$$

vilket är ekvationen för en linje på parameterform.

Vi såg i exemplet att vi fick antingen ingen eller oändligt många lösningar om $\det A = 0$. Man kan generalisera vårt resonemang och i allmänhet har vi följande viktiga resultat.

Sats 3 *Ett kvadratiskt ekvationssystem med koefficientmatris* A *har en unik lösning om och endast om* $\det A \neq 0$. *Om* $\det A = 0$ *så finns det antingen ingen lösning eller oändligt många lösningar.*