MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Milena Anguelova , 0762-721860.

OBS: Ange personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. (a) Visa att de fyra punkterna $(1,1,1), (1,2,3), (1,-1,-3)$ och $(2,1,2)$ ligger i ett plan och bestäm ekvationen för detta plan.
   (b) Ge, på parameterform, en linje som ligger i planet.
   (c) Visa tydligt hur du kan kontrollera ditt svar, d v s kontrollera att din linje verkligen ligger i planet. (6p)

2. (a) Lös $AXB + C = D$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (b) Kan man får ett annat *antal* lösningar till denna matrisekvation genom att byta siffror i matrisen D? Motivera ditt svar väl! (6p)

3. (a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = & 0 \\ 2x + y + 2z + w = & 0 \\ 3y - z - w = & 0 \\ -x + 6y - 3z - 2w = & 0 \end{cases}$$

   Kontrollera ditt svar.
   (b) Ange determinanten för koefficientmatrisen.
   (c) Ange ett egenvärde och motsvarande egenvektor till koefficientmatrisen.
   (d) Visa att vektorerna $(1,2,0,-1)^t$, $(1,1,3,6)^t$, $(1,2,-1,-3)^t$ och $(1,1,-1,-2)^t$ är linjärt beroende genom att ge en icke trivial linjärkombination av vektorerna som blir $\mathbf{0}$. (8p)

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Beräkna AB och använd sedan detta för att ge A^{-1}.
   (b) Beräkna den matris P som projicerar punkter i $\mathbb{R}^3$ ortogonalt på planet $x + y + z = 0$? Du kan ha nytta av ditt resultat i a). (6p)

5. Vi har slumpvandring på en graf G med följande grannmatris:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Rita grafen.

(b) Vad är fördelningsvektorn efter ett steg om vi startar med en fördelningsvektorn där varje nod har samma sannolikhet?

(5p)

6. (a) För reella tal a och b gäller att om $ab = 0$ är $a = 0$ eller $b = 0$. Gäller samma påstående för matriser, d v s gäller att $AB = \mathbf{0} \implies A = \mathbf{0}$ eller $B = \mathbf{0}$.

(b) Antag att $n \times n$-matrisen A inte inverterbar. Kan man finna en matris B så att AB blir inverterbar?

(c) Visa att om vi har två olika lösningar till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så ligger deras differens i kärnan till A, d v s differensen är lösning till det homogena ekvationsystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(6p)

7. En vetenskapsman förde under tre somrar anteckningar över antalet lejon och antalet hundratal zebror i en nationalpark i Afrika. Några år senare hittar man anteckningar i form av följande tabell.

	1991	1992	1993
Zebror	32	28	26
Lejon	16	12	10

(a) Man tar hjälp av en IT-teknolog för att skapa en modell för populationen. Utifrån den givna informationen finner IT-teknologens följande modell.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Hur har IT-teknologen gjort för att finna denna modell?

(b) Påvisar modellen att lejonen är utrotningshotade?

(7p)

8. A är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sådan att för de två linjärt oberoende vektorerna $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ gäller att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ och $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$. Visa att A är en spegling i en linje och att speglingen är ortogonal om och endast om $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$.

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 3 april. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Samuel, Kurt och Ragnar.