MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Lösningar till tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 20070316

---

1. (a) Bildar planet som innehåller de tre punkterna $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ och $(2,1,2)$ genom att finna normalen som

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\times\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Ser att planet får ekvationen

$$0=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=x+2y-z-2.$$

Kollar att den fjärde punkten verkligen ligger i planet genom att sätta in: $1+2(-1)-(-3)-2=0$.

(b) En linje ges enligt ovan av:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}.$$

(c) Sätter in linjen i planets ekvation 1+2(t+1)-(2t+1)-2=0t+2-2=0.

2. (a)

$$AXA+C=D\Leftrightarrow AXB=D-C.$$

Om nu A och B har inverser är ovanstående ekvivalent med att

$$X=A^{-1}(D-C)B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix}3&5\\10&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\3&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2&1\\7&5\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\7&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\7&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

(b) Nej. Eftersom A och B har inverser oberoende av siffrorna i D och vi har ekvivalenspilar är X unikt bestämd av uttrycket $X=A^{-1}(D-C)B^{-1}$ oberoende av siffrorna i D.

3. (a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\2&1&2&1&0\\0&3&-1&-1&0\\-1&6&-3&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&-1&0&-1&0\\0&3&-1&-1&0\\0&7&-2&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&-4&0\\0&0&-2&-8&0\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&-4&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=4t\\y=-t\\z=-4t\\w=t\end{cases}$$

(b) Eftersom vi ej har unik lösning är, enligt sats, $Det(K) = 0$ för koefficientmatrisen K.

(c) Ser att $K(4,-1,-4,1)^t = 0(4,-1,-4,1)^t$ alltså är $(4,-1,-4,1)^t$ en egenvektor med egenvärde 0.

(d) Eftersom vektorerna i fråga är kolonnerna i K ger varje nollskild punkt på lösningsmängden en uppsättning keofficienter som uppfyller villkoren.

4. (a) Multiplikation av matriserna ger $AB = 3I$, vilket säger att $A^{-1} = \frac{1}{3}B$.

(b) Planet har normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och innehåller vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alltså skall projektionsmatrisen P uppfylla

$$P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

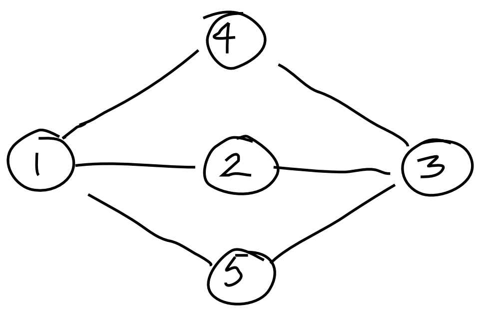
d v s

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Vi har slumpvandring på en graf G med följande grannmatris:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ritar ut 5 noder och numrerar dem från 1 till 5. Rad 1 i matriser säger att det skall finnas en väg från nod 1 till noderna 2, 4 och 5. Drar dessa tre kanter i grafen. Fortsätter för övriga fyra rader och drar de nya kanter som uppkommer. Får då följande graf.



(b) Tar först fram övergångsmatrisen genom att dela varje rad i A_G med antalet 1:or i raden. Får då

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fördelningsvektorns som vi startar med är $\mathbf{x} = (\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5})$. Efter ett steg får vi då födelningsvektorn

$$xM_G = (\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5})\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\frac{3}{10}\ \frac{2}{15}\ \frac{3}{10}\ \frac{2}{15}\ \frac{2}{15}).$$

(5p)

6. (a) Nej. T ex är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Om A inte inverterbar betyder det att dess determinant är noll. Eftersom vi vet att $det(AB) = det(A)det(B) = 0 \cdot det(B) = 0$ har även produkten AB determinant noll och därmed saknar den invers.

(c) Antag att $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ två lösningar. Då gäller att

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

d v s differensen $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ligger i kärnan till A.

7. (a) Söker A så att

$$A\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ och } A\begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 10 \end{pmatrix}$$

d v s vi finner att

$$A = \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -28 \\ -16 & 32 \end{pmatrix}\frac{1}{-64} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(b) Vi beräknar egenvärden och egenvektorer och finner

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1 \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

Ser sedan att $\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = 8\mathbf{v}_1 + 8\mathbf{v}_2$ vilket medför att

$$A^k\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = A^k(8\mathbf{v}_1 + 8\mathbf{v}_2) = 8A^k\mathbf{v}_1 + 8A^k\mathbf{v}_2 = 8(1)^k\mathbf{v}_1 + 8(\frac{1}{2})^k\mathbf{v}_2)$$

Detta kommer för alla naturliga tal k att ge ett positivt värde och konvergerar mot vektorn $8\mathbf{v}_1 = 8\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$

8. Ser att $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 = 1 \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ d v s att $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ är en egenvektor med egenvärde 1. På samma sätt ser vi att $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = -1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ d v s att $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ är en egenvektor med egenvärde -1. Alltså är A en spegling i linjen med riktningsvektor $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ i riktningen given av $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Speglingen är ortogonal omm skalärprodukten är noll d v s om

$$0 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_1|^2 - |\mathbf{x}_2|^2.$$

Då längder är positiva tal ser vi att detta gäller precis då $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$.