

Linjer, plan m m

Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax + By + C = 0$ eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

- (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r , d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.
- (b) Ta nu istället en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0) .
- (c) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm bilden av en cirkel med centrum i origo under den linjära avbildningen som ges av A . Bestäm en parametrisering och en ekvation för bilden.
- (d) (Om ni hinner) Bestäm en parametrisering av kurvan $x^4 + y^4 = r^2$. Eventuellt kan man ha nytta av funktionen

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t = 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

2. Lös uppgift 2.58a i boken. Låt de 9 procenttalen utgöra en 3×3 -matris A och antag att en 3-vektor \mathbf{v} innehåller antalet i storstad, tätort respektive landsbygd (efter 0 år). Hur många finns det i de tre olika kategorierna efter 1 år? Efter 2 år? Efter n år? (Inga siffror. Bara bokstäverna A , \mathbf{v} och n .)
3. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$ -matris med en $n \times p$ -matris?
4. Antag att vi är i \mathbb{R}^3 .

- (a) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Det finns olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. (Tänk geometriskt!)

- (b) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Det finns återigen olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa.

5. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.
- (a) Vad händer om man multiplicerar en över-(under-)triangulär matris med en annan över-(under-)triangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär?
- (b) Visa att (nästan) varje 2×2 -matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kan skrivas som en unik produkt $A = LU$, där

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Bestäm L och U uttryckt i a , b , c och d . Vilka A kan inte skrivas som $A = LU$?

- (c) (Om ni hinner) Visa att motsvarande resultat också gäller för varje 3×3 -matris.

Datorövningar

- För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t . Matlab gillar inte att man säger t ex "Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π ", utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, 2\pi]$.
 - Kolla vad kommandona $t = 0 : 10$, $t = 0 : 0.2 : pi$ och $t = 0 : pi/16 : pi$ ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentar?
 - Vad händer om du t ex tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna \cos , \tan , \arctan och \exp (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$.
 - Använd de parametreringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.
 - Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (för några olika k) har 'deformerat' den. Prova gärna också att t ex rotera den.
- Lös uppgift 2.58b i boken. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 år? (Vi gör antagandet att flyttningsmönstret är oförändrat hela tiden, vilket givetvis är totalt befängt i perspektivet 100000 år.) Testa med följande startfördelningar: alla bor i storstad, alla bor i tätort, alla bor på landsbygden samt lika många i de tre kategorierna.
- Låt A vara en 5000×1000 -matris, B en 1000×2000 -matris samt \mathbf{x} en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten $AB\mathbf{x}$: $(AB)\mathbf{x}$, $A(B\mathbf{x})$ samt $AB\mathbf{x}$ (dvs att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret `tic/toc` för att mäta tiden.) Kommentar, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?

Uppgift 4 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 18 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!