MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206 & TMV205, 2009-01-13.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Witt-Nyström, 0762-721860.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. Bestäm ekvationen (på parameterfri form) för det plan som innehåller punkterna $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 3, 1)$ och $R = (4, 1, 2)$. (6p)

2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Ange två linjärt oberoende vektorer $\mathbf{b}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning.
   (b) Ange om det är möjligt en vektor $\mathbf{c}$ sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ saknar lösning. Om det inte är möjligt så motivera varför.
   (6p)

3. Vad är matrisen för den linjära avbildning i planet som består av en rotation $\pi/3$ radianer moturs runt origo följt av spegling i linjen $y = x$? (6p)

4. (a) Bestäm ekvationen (på parameterform) för den linje L som går genom punkterna $(1, 3, 4)$ och $(2, -1, 5)$.
   (b) Bestäm ekvationen (på parameterfri form) för ett plan som innehåller L. (7p)

5. Bestäm avståndet mellan planen $2y + 4x + 8z = 28$ och $2x + y + 4z + 3 = 0$.
   (6p)

6. Ge två 2×2-matriser vars enda egenvärde är 0. (6p)

Var god vänd!

7. (a) Låt A vara matrisen (i standardbasen) för spegling i xy-planet. Visa att $\det A = -1$.
   (b) Antag att två matriser B respektive C är relaterade genom

$$B = PCP^{-1},$$

   för någon inverterbar matris P. Visa att $\det B = \det C$.
   (c) Låt nu A vara matrisen (i standardbasen) för spegling i $\mathbb{R}^3$ i ett (godtyckligt) plan genom origo. Visa att $\det A = -1$ (Tips: Det kan vara bra att utnyttja de två tidigare deluppgifterna.) (7p)

8. Låt M vara mängden av alla 2×2-matriser där alla 4 elementen är heltal samt determinanten är 1. Ett exempel på en matris som finns i M är

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För en matris A i M definierar vi en reell funktion

$$f_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ om } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   (a) Motivera att om $A \in M$ så gäller att A^{-1} existerar samt $A^{-1} \in M$.
   (b) Visa att för alla matriser A och B i M gäller att

$$f_A \circ f_B = f_{AB}.$$

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 1 februari. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.