


Linjära ekvationssystem

Teoriövningar

- Antag att vi har en 3×5 -matris A och betrakta det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Antag också att första kolonnen i A inte bara består av nollor. Tänk er nu att vi använder elementära radoperationer för att omvandla A till trappstegsform.
 - Vilka olika 'former' kan trappstegsformen ha? (Det finns 11st olika.) En 3×3 -matris med determinanten skild från noll t ex har
 'trappstegsformen': 
 - Vilka kolonner har pivotelement respektive är fria variabler för de olika formerna?
 - Hur många lösningar kan de olika formerna ha? Hur många parametrar har de om det finns oändligt många lösningar?
- Kolla upp vad ett **homogent** linjärt ekvationssystem är. Antag att vi har ett sådant med m ekvationer och n obekanta.
 - Vad händer med högerledsvektorn när man utför Gausselimination på systemet?
 - När finns det en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m = n$?
 - När finns det en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m < n$?
 - När finns det en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m > n$?
- Betrakta ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är en 3×3 -matris med kolonnerna \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 och \mathbf{a}_3 och $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$.
 - Skriv produkten $A\mathbf{x}$ som en linjärkombination av kolonnerna i A .
 - Motivera att $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$ har lösning för $1 \leq i \leq 3$. Ge en lösning i vart och ett av fallen.
 - Försök uttrycka med ord mängden av alla \mathbf{b} sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har någon lösning.
 - Samma fråga som förra uppgiften för en godtycklig $m \times n$ -matris A .
- Ta reda på hur reduktion till trappstegsform av en (kvadratisk) matris A ger en faktorisering $A = LU$, där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U är en övertriangulär matris. Härled sedan denna så kallade LU -faktorisering (eller LR -faktorisering) av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Datorövningar

1. Vi ska börja med att titta på 3 olika sätt att lösa ett linjärt ekvations-system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ när A är en kvadratisk matris. Det första sättet är att beräkna inversen till A ($=\text{inv}(A)$ i Matlab) och multiplicera med den på lämpligt sätt. Det andra sättet är Gauss-elimination (skrives $A\backslash\mathbf{b}$ i Matlab). Matlabs rutin är såpass smart att den upptäcker om A har någon speciell form, t ex om A redan är triangulär och utnyttjar i så fall detta. Det tredje sättet är att först LU -faktorisera A ($[L,U]=\text{lu}(A)$ i Matlab), d v s hitta triangulära matriser L och U sådana att $A = LU$. (I själva verket är inte L triangulär i allmänhet utan en triangulär matris som fått sina rader permuterade men det spelar ingen roll.) När man har LU -faktoriseringen kan man få lösningen genom att lösa två triangulära system. Hur då?
 - (a) Bilda en 3×3 -matris A med slumpstal och en 3-vektor \mathbf{b} också med slumpstal. Lös sedan systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med de tre olika metoderna och kolla att du får samma svar. Kolla också att svaret är rätt! Hur gör man det?
 - (b) Vi ska nu jämföra hur lång tid de tre olika metoderna tar. Med hjälp av paret av kommandon `tic` och `toc` kan man mäta tiden. Detta fungerar bra åtminstone när man har tider på 1/10s och uppåt. Använd slumpmatriser och slumpvektorer och testa storlekar upp till 1000×1000 och gärna högre. För LU -faktorisering kolla dels hur lång tid faktoriseringen tar och dels hur lång tid bakåtsubstitutionen tar. Kommentarer?
 - (c) När kan man tänka sig att det är effektivt att använda LU -faktorisering?
2. I Matlab finns ett kommando `RREF` som utför Gauss-Jordan elimination på en matris. Använd den för att lösa övning 3.16 i boken.
3. Vi ska nu se vad Matlab gör om man kör Gausselimination när koefficientmatrisen inte är kvadratisk. Ta gärna också `RREF` till hjälp för att svara på frågorna. Operatorn ' $A\backslash\mathbf{b}$ ' kallas för `mldivide` (matrix left division) i Matlab och ta en (grundlig) titt på hjälpen för `mldivide` innan du börjar.
 - (a) Låt först A vara en (inte alltför stor) slumpmatris med fler rader än kolonner, \mathbf{b} en matchande vektor och låt Matlab lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med Gauss-elimination $A\backslash\mathbf{b}$. Får du en lösning? Kolla att det är en lösning. Finns det fler lösningar?
 - (b) Låt nu istället A ha fler kolonner än rader. Får du nu en lösning? Kolla att det är en lösning. Finns det fler lösningar?

Uppgift 3 bland teoriuppgifterna samt uppgift 3 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 23 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!