

Vektorer av dimension n

Definition 1 En vektor av dimension n (n -vektor) \mathbf{v} definieras som en ordnad n -tupel av reella tal och vi skriver

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Mängden av alla n -vektorer betecknas med \mathbb{R}^n .

Exempel 1 Antag att vi vill beskriva vinden i ett rum vid olika tidpunkter. Det kan man göra med en 7-dimensionell vektor $\mathbf{v} = (x \ y \ z \ t \ x_v \ y_v \ z_v)^t$, där (x, y, z) är rumskoordinaterna, t är tidpunkten och (x_v, y_v, z_v) är hastighetsvektorn för vinden i punkten (x, y, z) vid tidpunkten t .

Vi definierar nu ett antal operationer och begrepp som vi hade för vektorer i planet och rummet för godtyckliga vektorer. Givetvis viktigt att definiera dem så att de stämmer överens med de definitioner vi redan gjort i specialfallen $n = 2$ och $n = 3$.

Låt $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^t$ och $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^t$ vara två n -vektorer och $c \in \mathbb{R}$. Vi definierar nu:

1. Addition:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

2. Multiplikation med skalär:

$$c\mathbf{u} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}.$$

3. Skalärprodukt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

4. Längden av en vektor:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

I analogi med vår tidigare erfarenhet av vektorer i planet och rummet gör vi följande definitioner.

Definition 2 Vi säger att två vektorer \mathbf{u} och \mathbf{v} är **parallella** om det finns ett reellt tal c så att $c\mathbf{u} = \mathbf{v}$ och vi säger att de är **ortogonala** om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Det är nu en viktig (men kanske inte jättekul) uppgift att visa att dessa definitioner följer samma räkneregler som de vi tidigare visat för vektorer i planet och rummet. Många av bevisen är helt identiska och vi gör ett av dem som exempel och använder sedan detta för att visa att Pythagoras sats gäller också i godtycklig dimension.

Proposition 1 Skalärprodukt är distributiv över addition, dvs

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

för n -vektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} .

Bevis. Vi får direkt från definitionen av addition och skalärprodukt (och med uppenbar notation) att

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i(v_i + w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i v_i + u_i w_i = \sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n u_i w_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Vad vi utnyttjade förutom definitionerna var i stort sett enbart distributiviteten för vanlig multiplikation och addition. \square

Sats 1 Pythagoras sats gäller i godtycklig dimension n , dvs om \mathbf{u} och \mathbf{v} är ortogonala n -vektorer så gäller att

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Bevis. Förutsättningen att \mathbf{u} och \mathbf{v} är ortogonala är per definition ekvivalent med att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Genom att utnyttja definitionen av längd av en vektor och propositionen ovan så får vi

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 0 + 0 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

\square

Linjära avbildningar

Vi ska nu titta på matriser av godtycklig storlek och bli se hur varje matris ger upphov till en linjär avbildning.

Kom ihåg att en matris av typ $m \times n$ var ett tvådimensionellt fält av reella tal med m rader och n kolonner. Om två matriser A och B är av typ $m \times n$

respektive $n \times p$ så definierade vi $C = AB$ som en matris av typ $m \times p$ med element c_{ij} som ligger i rad i och kolonn j som

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \mathbf{a}_i^t \cdot \mathbf{b}_j,$$

där \mathbf{a}_i är rad i i A och \mathbf{b}_j är kolonn j i B . Man kan alltså se varje element i produkten som en skalärprodukt mellan (transponatet av) en rad i A och en kolonn i B .

Anmärkning 1 Notera följande likhet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \mathbf{v},$$

där produkten i högerledet är matrismultiplikation mellan en matris med bara en rad och en annan med bara en kolonn. Observera också att om \mathbf{u} och \mathbf{v} är n -vektorer ($=n \times 1$ -matriser) så är $\mathbf{u}^t \mathbf{v}$ ett tal medan $\mathbf{u} \mathbf{v}^t$ är en $n \times n$ -matris.

Antag nu att vi har en $m \times n$ -matris A och en n -vektor \mathbf{v} . Då gäller att $A\mathbf{v}$ är av typ $m \times 1$, dvs en m -vektor. Vi ser alltså att en $m \times n$ -matris A ger en avbildning som till varje element i \mathbb{R}^n ordnar ett element i \mathbb{R}^m .

Definition 3 Låt A vara en $m \times n$ -matris. Då definierar vi **matrisavbildningen** f som hör till A som

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}, \quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Exempel 2 Låt f vara projektionen från \mathbb{R}^3 på \mathbb{R}^2 som projicerar rummet ortogonalt på xy -planet. Det betyder helt enkelt att punkten (x, y, z) ska avbildas på (x, y) . Detta svarar mot matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ty vi har att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Projektionen är alltså en matrisavbildning.

Vi rekapitulerar att en avbildning var linjär om

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \text{ och } f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}),$$

för alla vektorer \mathbf{x} och \mathbf{y} samt reella tal c .

För matrisavbildningen som hör till A så får vi

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

och

$$f(c\mathbf{x}) = A(c\mathbf{x}) = (Ac)\mathbf{x} = (cA)\mathbf{x} = c(A\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}),$$

så att matrisavbildningarna är linjära. Omvänt kan man, precis som vi gjorde för specialfallet $m = n = 2$, visa att alla linjära avbildningar från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m är matrisavbildningar som hör till någon $m \times n$ -matris. Begreppen matrisavbildningar och linjära avbildningar är alltså ekvivalenta.

Exempel 3 Vi ska nu betrakta ortogonal projektion på en godtycklig linje i \mathbb{R}^n , dvs varje vektor i \mathbb{R}^n ska projiceras ortogonalt på en linje L i \mathbb{R}^n . Man kan ange en linje i \mathbb{R}^n på parameterform precis som i planet och rummet genom $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

där \mathbf{x}_0 är en punkt på L och \mathbf{v} en riktningsvektor för L . I analogi med tidigare så definierar vi ortogonal projektionen av \mathbf{x} på L , \mathbf{x}_L , som den vektor $c\mathbf{v}$ som är sådan att $\mathbf{x} - \mathbf{x}_L$ är ortogonal mot \mathbf{v} . Detta ger

$$0 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - c\mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

och från detta löser vi ut $c = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} / \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ och får

$$\mathbf{x}_L = c\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v},$$

vilket påminner om en formel vi känner igen (här har vi inte normerat riktningsvektorn \mathbf{v}). Genom att utnyttja likheten $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x}^t \mathbf{v}$, att multiplikation av ett tal med en matris är kommutativ samt att matrismultiplikation är associativ, får vi

$$\mathbf{x}_L = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v}^t \mathbf{x})\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}^t \mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v}\mathbf{v}^t)\mathbf{x}.$$

Detta visar att den ortogonala projektionen på en linje L med riktningsvektor \mathbf{v} är en linjär avbildning med matrisen

$$A = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v}\mathbf{v}^t).$$

Observera att som vi nämnde tidigare är $\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ en $n \times n$ -matris.