MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2010-01-12.
Lösningar

1. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

   Detta ger $z = -10/9$, $y = -4-4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3-10/9-2\cdot4/9 = 1$.

2. Om Q är en godtycklig punkt i planet så gäller att avståndet från P till planet ges av längden av den ortogonala projektionen, $\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}$, av $\overrightarrow{QP}$ på normalen till planet.

   Vi väljer $Q = (1, -1, -1)$. Då är $\overrightarrow{QP} = (0\ 1\ 4)^t$ och $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normerad normalvektor. Det sökta avståndet blir då

$$\left|\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}\right| = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right| = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}}(2+12) = \sqrt{14}.$$

3. Spegling i linjen $y = x$ avbildar $\mathbf{e}_x$ på $\mathbf{e}_y$ och vice versa, så den har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Projektion på x-axeln lämnar $\mathbf{e}_x$ totalt oberörd och krossar $\mathbf{e}_y$ totalt så den har matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Den sökta matrisen är alltså

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}-x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$$

   som har lösningarna $x = 0$ och $x = 1$ som därmed är de två egenvärdena. Egenvektorerna får man genom att dels lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som ger multipler av $(1\ \ -1)^t$ och dels

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   som har lösning alla multipler av $(1\ 1)^t$. Vi har alltså att 0 är egenvärde med egenvektorer alla multipler av $(1\ -1)^t$ och att 1 är egenvärde med egenvektorer alla multipler av $(1\ 1)^t$.

(b) De två egenvektorerna är ortogonala. Multipler av $(1\ 1)^t$ är oförändrade och de ortogonala vektorerna avbildas på nollvektorn. Därmed är det ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $(1\ 1)^t$.

5. Vi låter F vara matrisen som har $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Då gäller att $\mathbf{x}$ koordinater i standardbasen, $\mathbf{x}_E$, och dess koordinater i F-basen, $\mathbf{x}_F$, uppfyller

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E.$$

Eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$. Vi beräknar först

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får då

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E = F^t\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Kontrollera att det stämmer, d v s att $0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{5}{3} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(1, 1, 1)$:

$$0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{5}{3} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \mathbf{f}_3 = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som säger att vinkeln α mellan två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ satisfierar

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\,\mathbf{x}\,||\,\mathbf{y}\,|}.$$

Vinklarna mellan paren av de tre vektorerna uppfyller därmed

$$\begin{aligned} \cos\gamma_1 &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\,\mathbf{v}_1\,||\,\mathbf{v}_2\,|} = \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot 3} = -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \cos\gamma_2 &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{|\,\mathbf{v}_1\,||\,\mathbf{v}_3\,|} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \\ \cos\gamma_3 &= \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{|\,\mathbf{v}_2\,||\,\mathbf{v}_3\,|} = \frac{-12}{3\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Eftersom vinkeln blir större då cosinus för den minskar (i intervallet $[0, \pi]$ som är det som är intressant) och

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{2}{7} < \frac{16}{17} = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2,$$

så följer det att γ_3 är störst. Svaret är alltså vinkeln mellan $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

7. Låt $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Förutsättningarna i uppgiften ger att

$$|\mathbf{u}| = 2|\mathbf{v}| \text{ och } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos\frac{\pi}{3}|\mathbf{u}||\mathbf{v}| = \frac{1}{2} \cdot 2|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2.$$

Den sökta vinkeln α uppfyller att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}.$$

Genom att utnyttja förutsättningarna så får vi att

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 3|\mathbf{v}|^2$$

och

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 7|\mathbf{v}|^2 \cdot 3|\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

Det ger att

$$\cos\alpha = \frac{3|\mathbf{v}|^2}{\sqrt{7}\sqrt{3}|\mathbf{v}|^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ och } \alpha = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

8. Alla vektorer i planet kommer att vara oförändrade så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. En vektor $\mathbf{v}$ som är vinkelrät mot planet avbildas på $-\mathbf{v}$ så den har egenvärdet -1. Speciellt är $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ortogonal mot planet. Summerar vi så är alltså $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tre linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdena 1, 1 och -1. Några fler finns det inte, eftersom vi bara kan ha högst tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$.