

## MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2010-01-12.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Richard Lärkäng, 0703-088304.

---

**OBS:** Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.  
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

med hjälp av Gausselimination.

(6p)

2. Beräkna avståndet från punkten  $P = (1, 0, 3)$  till planet  $x + 2y + 3z + 4 = 0$ .

(6p)

3. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning i  $\mathbb{R}^2$  som består av att första spegla i linjen  $y = x$  och sedan projicera ortogonalt på  $x$ -axeln.

(6p)

4. (a) Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(b) Beskriv geometriskt vad den linjära avbildningen som svarar mot matrisen  $A$  är. Din beskrivning bör innehålla något av orden projektion, spegling eller rotation.

(7p)

5. En vektor  $\mathbf{x}$  har koordinaterna  $(1, 1, 1)$  i standardbasen. Bestäm dess koordinater i den högerorienterade ON-basen  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$  där

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$$

(uttryckt i standardbasen). Kontrollera också att du fått rätt svar (kontrollen ska redovisas och motiveras).

(7p)

Var god vänd!

6. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vara tre vektorer. Mellan vilket par av dessa vektorer är (den minsta) vinkeln störst?

(6p)

7. Antag att  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är två vektorer som bildar vinkeln  $\pi/3$  radianer och vars längder uppfyller att  $\mathbf{u}$  är dubbelt så lång som  $\mathbf{v}$ . Vad är (minsta) vinkeln mellan vektorerna  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  och  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ?

(6p)

8. Låt  $A$  vara matrisen för den linjära avbildning i  $\mathbb{R}^3$  som är spegling i planet genom origo som spänns upp av vektorerna  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$ .

(a) Vad har  $A$  för egenvärden?

(b) Ge tre linjärt oberoende egenvektorer till  $A$ .

Svaren ska motiveras.

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 26:e januari. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL!

Stefan.