Linjära avbildningar och fraktaler

Teoriövningar

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

   (a) Vad gör A med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$respektive en godtycklig vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

   (b) Beräkna A^n och $\det A^n$. Vad händer med $\det A^n$ då $n \longrightarrow \infty$?

   (c) Vad gör A^n med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ respektive en godtycklig vektor $\mathbf{v}$? Vad händer med riktningen för vektorn $A^n\mathbf{v}$ då n växer?

   (d) Vi definierar en följd av vektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots$ rekursivt genom

   $$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}, \ n \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

   Vad är $\mathbf{v}_n$ explicit? Bevisa ert påstående.

2. Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

   (a) Bestäm matrisen M som avbildar $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ på $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$.

   (b) Sammanfatta ert svar i första uppgiften som en likhet mellan de tre matriserna M, $(\mathbf{u}\ \mathbf{v})$ och $(\mathbf{e}_x\ \mathbf{e}_y)$.

   (c) Bestäm den matris N som avbildar vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ på $\mathbf{e}_x$ respektive $\mathbf{e}_y$.

   (d) Finns det någon relation mellan M och N?

   (e) Bestäm den matris som avbildar vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ respektive $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Tips: Utnyttja något ni redan gjort.

3. Låt $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vara en godtycklig enhetsvektor.

   (a) Vad ger det faktum att $\mathbf{e}$ är en enhetsvektor för villkor på a och b?

   (b) Bestäm matrisen P för den linjära avbildning som projicerar ortogonalt på $\mathbf{e}$.

   (c) Vad är P^2, P^3 och P^n för ett godtyckligt positivt heltal n? Kan man tänka ut det utan att räkna?

   (d) Vad är determinanten av P? Kan man tänka ut det utan att räkna?

   (e) Vad är P^{-1}?

Datorövningar

Slutmålet med övningen är att konstruera matlabkod som genererar så kallade IFS-fraktaler men vi tar det i steg.

1. Konstruera en funktion som har tre argument; en 2×2-matris A, en 2-vektor $\mathbf{v}$ och ett positivt heltal n. Funktionen ska generera n stycken vektorer rekursivt som i (1), lägga dem i en $2 \times n$ matris och och sedan plotta ut dem som punkter. Tips: Det är bra att alltid först göra plats i minnet om man vet hur stor en matris ska vara. Man kan t ex använda kommandot 'zeros' för detta ändamålet.

2. Testa er funktion på följande (och gärna andra också) matriser och vektorer (testa med olika längd n):

   (a) Låt A vara rotation $\pi/10$ radianer och ta startvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Låt A vara rotation 2 radianer och ta startvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Varför blir det så olika jämfört med $\pi/10$?

   (c) A sammansättning av en rotation kring origo och en skalning med s. Det finns ett 'kritiskt' s-värde. Vilket? Kan ni göra en inåtgående spiral?

3. Gör en ny funktion som istället för att hela tiden ta samma matris A varje gång tar en ny 'slumpmatris' med element i intervallet. -1 till 1. (Den har alltså då bara två argument $\mathbf{v}$ och n). Tips: Man använder sig lämpligen av funktionen 'rand'. Testa funktionen några gånger. Vad händer med $\mathbf{v}_n$ då n växer? (Observera att det är stor storleksskillnad på talen. Kolla på vektorerna som genereras.) Tag nu istället element i intervallet. -2 till 2. Vad händer nu med $\mathbf{v}_n$ då n växer? Om ni har tid så kan ni undersöka vad som händer om man tar intervallet -1.5 till 1.5.

4. Dags nu att göra en kommandofil som genererar 'Barnsleys ormbunksblad'. Denna genereras av 4 stycken affina avbildningar $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ som har matriser respektive vektorer givna av

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}.$$

   Man kan generera ormbunksbladet genom att rekursivt definiera nya punkter som i (1) fast i varje steg så väljer man en av de 4 affina avbildningarna med en given sannolikhet. Med andra ord så startar man med en vektor $\mathbf{v}_0$ och skapar vektorn $\mathbf{v}_n$ rekursivt genom

$$\mathbf{v}_n = A_i \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{b}_i, \ n \geq 1,$$

   där indexet i väljs slumpmässigt för varje n. Lämpliga sannolikheter för de 4 avbildningarna kan vara $1,\ 85,\ 7$ respektive 7%.

5. Gör om fraktalprogrammet så att det blir en funktion som har antal punkter, en lista med matriser, en lista med vektorer och en sannolikhetslista som argument och som genererar motsvarande IFS-figur. Sök exempel på affina avbildningar som ger fina fraktala bilder på nätet (sök exempelvis på IFS fractal) eller försök hitta på egna. (Lyckas ni väl med att hitta på någon egen så är jag nyfiken.)

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 4 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 8 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan.