MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2010-03-11.
Lösningar

1. Vi gör elementära radoperationer på totalmatrisen för ekvationssystemet och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & -1 & -1 \\ a & a+1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & -1 \\ 0 & a & a-1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att det inte är unik lösning om och endast om $a^2 - 1 = 0$, d v s om $a = 1$ eller $a = -1$. Om $a = -1$ så blir sista ekvationen $0 = -2$ och då saknas lösning, men om $a = 1$ så blir sista ekvationen $0 = 0$ och vi kommer då att få oändligt många lösningar. Sätt nu $a = 1$. Tredje kolumnen är fri och vi sätter $z = t$ till en parameter. Andra ekvationen blir $y = -1$ och den första $x = -y - z = 1 - t$ så lösningarna ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Arean ges av längden av vektorprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och vektorprodukten är dessutom normal till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så det verkar vara en god idé att beräkna vektorprodukten och vi får

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså att arean är

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{13^2 + (-7)^2 + 9^2} = \sqrt{299}$$

och ekvationen för planet blir $13x - 7y + 9z = 0$ eftersom konstanten blir 0 då planet går igenom origo.

3. Matrisen R för rotationen f är

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och matrisen för f^{-1}, som ju är rotation $\pi/4$ medurs, är

$$R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

För ortogonala projektionen g gäller att matrsien S fås från att

$$g(\mathbf{e}_x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad g(\mathbf{e}_y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{så} \quad S = \begin{pmatrix} g(\mathbf{e}_x) & g(\mathbf{e}_y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för sammansättningen blir då

$$\begin{aligned} RSR^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Vi har att

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

   vilket betyder att det finns en väg i båda riktningarna mellan varje par av noder eftersom alla elementen är positiva. Därmed är R starkt sammanhängande.

   (c) Vi beräknar $A^6 = (A^3)^2$ och finner att elementet på plats $(4, 2)$ är 19 så det finns 19 olika vägar av längd 6 från nod 4 till nod 2.

5. (a) För varje vektor $\mathbf{x}$ gäller att $\mathbf{x} = F\mathbf{x}_F$ där F har basvektorerna som kolumner och $\mathbf{x}_F$ är $\mathbf{x}$ koordinater i basen F. Vi får alltså att $\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}$ så speciellt

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1)_F &= F^{-1}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\det(F)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{e}_2)_F &= F^{-1}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   (b) Enligt bassatsen så gäller att

$$A_F = \begin{pmatrix} g(\mathbf{f}_1)_F & g(\mathbf{f}_2)_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2)_F & (3\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Matrisen A relativt standardbasen är relaterad till A_F via $A = FA_FF^{-1}$ och eftersom det råkade bli $A_F = F$ så får vi

$$A = FA_FF^{-1} = FFF^{-1} = F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

och alltså är matrisen den samma relativt de två baserna.

6. Vi har att $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}_{L_1}$, d v s den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{RP}$ på L_1. Vi beräknar projektionen och får

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}_{L_1} = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att $Q = (2, 0, -2) + (8/9, 4/9, 8/9) = (26/9, 4/9, -10/9)$.

En linje L_2 genom P är sådan att P är närmsta punkt om och endast om riktningsvektorn för L_2 är ortogonal mot $\overrightarrow{PQ}$. För att P ska vara unik får inte L_1 och L_2 vara parallella. Vi har att

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 26 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 17 \\ -32 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och vi väljer en vektor t ex

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

som är ortogonal mot $\overrightarrow{PQ}$ och inte parallell med $\mathbf{v}$. Ekvationen för en efterfrågad linje blir då

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{u}$ kan bytas ut mot vilken vektor som helst som är ortogonal mot $\overrightarrow{PQ}$ och ej parallell med $\mathbf{v}$.

7. Sätt $B = AA^t$. Då gäller att $B^t = (AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t = B$ så B är symmetrisk och då säger spektralsatsen för symmetriska matriser att det finns ON-matris P och diagonalmatris D så att $AA^t = PDP^t$. Dessutom gäller att kolumnerna i P är egenvektorer till AA^t och diagonalelementen i D är motsvarande egenvärden. För att bestämma P och D beräknar vi därför egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$AA^t = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Karakteristiska ekvationen ger

$$0 = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 6 \\ 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 18\lambda + 45.$$

Denna har lösningarna $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 15$. Vi bestämmer motsvarande egenvektorer och får genom att lösa $(A - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ för $i = 1, 2$ att normerade egenvektorer är

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det gör att vi kan ta

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

8. Raderna i övergångsmatrisen M till en Markovkedja har alla summan 1. Det betyder att

$$M\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_{1i} \\ \sum_{i=1}^n m_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n m_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_n.$$

Alltså är $\mathbf{1}_n$ en egenvektor till M med egenvärdet 1.