Lösningar till utvalda uppgifter på veckoblad 1, Linjär algebra IT, VT2010

Avsnitt 1.1 och 1.2

6 Låt $ABCD$ vara det givna parallellogrammet och låt M_1 vara mittpunkten på diagonalen från A till C och M_2 mittpunkten på diagonalen från B till D. Vi ska visa att $M_1 = M_2$. Det är ekvivalent att visa att $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_2}$. Villkoren att de är mittpunkter och att $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ger

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

och

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_2} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM_1}\end{aligned}$$

och därmed är saken klar.

7 Låt parallellogrammet vara $ABCD$. Låt $PQRS$ vara mittpunkterna i kvadraterna på sidorna AB, BC, CD respektive DA. Vi ska visa att $PQRS$ är en kvadrat. Sätt $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{v}$. Låt $\mathbf{u}'$ vara vektorn från mittpunkten av AB till P. Då gäller att $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}'\|$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. På motsvarande sätt låt $\mathbf{v}'$ vara vektorn från S till mittpunkten på AD. Då är $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|$ och $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$. Dessutom gäller att $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ och $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ har samma orientering så $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}$. Den sista likheten följer av att om vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}'$ är α så är den mellan $\mathbf{u}'$ och $\mathbf{v}$ $\pi - \alpha$ och $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$.

Om vi adderar vektorer och utnyttjar att $ABCD$ är en parallellogram så får vi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{SR} = -\mathbf{u}' + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{v}', \\ \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PS} = -\mathbf{v}' + \mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{u}'.\end{aligned}$$

Vi ska visa att $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\|$ och $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$. Direkt beräkning samt utnyttjande av sambanden mellan $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}'$ ger

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{QR}\right\|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR} \\ &= -4\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' + 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} &= -2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' + \|\mathbf{u}'\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Detta var precis vad vi skulle visa och därmed är saken klar.

Avsnitt 1.3

4 Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ vara de två sökta vektorerna. Diagonalerna i parallellogrammet som spänns av dessa är $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ samt $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Villkoret är alltså att (t ex) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = 3$

och $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = 1$. Vi kan nu välja (godtyckligt) två vektorer som har längd 3 respektive 1 som inte är ortogonal. Ett möjligt val är

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{a}-\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Löser vi ut $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ (genom att addera och subtrahera ekvationerna) så får vi

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6 a) Vi har att

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$$

och

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Dessa är lika om och endast om $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, d v s om och endast om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är ortogonala.

b) Vektorerna $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ är diagonalerna i parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Alltså är diagonalerna lika långa om och endast om sidorna är ortogonal, d v s om och endast om parallellogrammet är en rektangel.

7 Låt $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{u}-\mathbf{v}$. Förutsättningarna i uppgiften ger att

$$\|\mathbf{u}\| = 2\|\mathbf{v}\| \text{ och } \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \cos\frac{\pi}{3}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\cdot 2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Den sökta vinkeln α uppfyller att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

Genom att utnyttja förutsättningarna så får vi att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 3\|\mathbf{v}\|^2$$

och

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 7\|\mathbf{v}\|^2\cdot 3\|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Det ger att

$$\cos\alpha = \frac{3\|\mathbf{v}\|^2}{\sqrt{7}\sqrt{3}\|\mathbf{v}\|^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ och } \alpha = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

8 a) Vi vet att $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ och att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \cos\alpha \,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = \frac{1}{3}\|\mathbf{x}\|^2 .$$

Vi ska beräkna β där

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Vi beräknar täljaren och (kvadraten av) nämnaren var för sig:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(c\mathbf{x}+d\mathbf{y}) = ac\,\|\mathbf{x}\|^2 + bd\,\|\mathbf{y}\|^2 + (ad+bc)\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\\ &= (ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc))\,\|\mathbf{x}\|^2\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 &= ((a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}))\,((c\mathbf{x}+d\mathbf{y})\cdot(c\mathbf{x}+d\mathbf{y}))\\ &= \left(a^2\,\|\mathbf{x}\|^2 + b^2\,\|\mathbf{y}\|^2 + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)\left(c^2\,\|\mathbf{x}\|^2 + d^2\,\|\mathbf{y}\|^2 + 2cd\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)\\ &= (a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)\,\|\mathbf{x}\|^4 .\end{aligned}$$

Beräknar vi kvoten så får vi att termerna som innehåller längden av $\mathbf{x}$ tar ut varandra och vi får:

$$\beta = \arccos\frac{ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc)}{\sqrt{(a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)}}.$$

b) Vi ska se till att täljaren i argumentet till $\arccos$ blir 0, d v s

$$0 = ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc).$$

En lösning (bland oändligt många) är $a=b=c=1$ och $d=-1$.

9 Motstående hörnen i en kub med sidan a och sidorna längs axlarna i koordinatsystemet har koordinaterna:

$$\begin{array}{ccc}(0,0,0) & \text{och} & (a,a,a)\\ (0,0,a) & \text{och} & (a,a,0)\\ (0,a,a) & \text{och} & (a,0,0)\\ (0,a,0) & \text{och} & (a,0,a).\end{array}$$

Rymddiagonalerna är alltså vektorerna

$$\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\\a\\-a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\\-a\\-a\end{pmatrix}\ \text{och}\ \begin{pmatrix}a\\-a\\a\end{pmatrix}.$$

Längden av var och en av dessa är $\sqrt{3}a$ och skalärprodukten mellan dem är antingen a^2 eller $-a^2$. Det betyder att vinkeln β mellan ett par av dessa vektorer uppfyller

$$\cos\beta = \frac{\pm a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{3}a} = \pm\frac{1}{3}.$$

Om $\cos\beta < 0$ så är vinkeln mellan vektorerna trubbig och cosinus av den spetsiga vinkeln mellan diagonalerna är då negationen av det värdet. Alltså är cosinus för vinkeln mellan diagonalerna alltid $1/3$.

Avsnitt 1.4

5 Om någon av vektorerna är nollvektorn så är de olika produkterna trivialt nollvektorn i båda fallen. Antag nu att de inte är nollvektorn.

a) Enligt definitionen är $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{x}$ och därmed är $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

b) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ och då är förstås även $((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Om de inte är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normal till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{x} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ ligger i detta plan och är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Vi har att $\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{v}$ är parallella. Eftersom $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ alla ligger i ett plan och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{u}$ är ortogonala så är detta ekvivalent med att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. Alltså är

$$((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella eller ortogonala.

6 Det räcker att visa att det är sant i rummet. Om man är i planet kan man helt enkelt betrakta detta som t ex xy-planet i rummet (med tredje koordinaten lika med noll).

Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara sidorna i parallellogrammet som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som diagonalvektorer. Då gäller (lite olika beroende på hur man ordnar och riktar diagonalerna) att $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{u}$ och $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{v}$ vilket ger att $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Arean av parallellogrammet som spänns upp av två vektorer är lika med längden av deras vektorprodukt. Alltså är arean av P_2 lika med $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ och arean av P_1 lika med $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$. Räkneregler för vektorprodukt ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{0} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{0}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Därmed är arean av P_1 lika med $\frac{1}{2}\|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\|$ och alltså hälften av arean av P_2.

Avsnitt 1.5

5 Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som ger att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|},$$

där α är (minsta) vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. I vårt fall så får vi

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Alltså är den sökta vinkeln $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \pi/3$.

6 Vi har att $\cos 60 = 1/2$ så enligt definitionen av skalärprodukt så har vi

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{2 \, \|\mathbf{w}\|} \iff 1 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Man kan ansätta en godtycklig vektor och se vad villkoren blir, men kanske ser man direkt att t ex både

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

löser ekvationen.

7 a) De är ortogonala om och endast om skalärprodukten är noll. Vi får

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - 9 + 2x = 2x - 6,$$

så de är ortogonala om och endast $x = 3$.

b) Vi får en sökt vektor $\mathbf{e}$ genom att multiplicera $\mathbf{v}$ med inversen av dess längd, d v s

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Den ortogonala projektionen $\mathbf{u}_L$ ges av

$$\mathbf{u}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{2x-6}{22} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{x-3}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

10 Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som säger att vinkeln α mellan två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ satisfierar

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Vinklarna mellan paren av de tre vektorerna uppfyller därmed

$$\begin{aligned}
\cos \gamma_1 &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \, \|\mathbf{v}_2\|} = \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot 3} = -\frac{2}{\sqrt{14}} \\
\cos \gamma_2 &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_1\| \, \|\mathbf{v}_3\|} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \\
\cos \gamma_3 &= \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_2\| \, \|\mathbf{v}_3\|} = \frac{-12}{3\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Eftersom vinkeln blir större då cosinus för den minskar (i intervallet $[0, \pi]$ som är det som är intressant) och

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{2}{7} < \frac{16}{17} = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2,$$

så följer det att γ_3 är störst. Svaret är alltså vinkeln mellan $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

11 En godtycklig vektor i detta plan är en linjärkombination $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. Villkoret att den är ortogonal mot $\mathbf{v}$ är ekvivalent med

$$0 = \mathbf{v} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4a + 9b.$$

Ett möjligt val är $a = 9$ och $b = -4$. Detta ger vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Avsnitt 1.6

7 En riktningsvektor för planet ges av riktningsvektorn för linjen $\mathbf{v}_1 = (1\ 2\ 3)^t$. En andra riktningsvektor $\mathbf{v}_2$ får man genom att ta vektorn från origo till en punkt på linjen, t ex $(2, 2, 3)$. Det ger $\mathbf{v}_2 = (2\ 2\ 3)^t$. Vi får nu en normalvektor till planet

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Därmed är ekvationen för planet given av $3y - 2z + d = 0$, där $d = 0$ eftersom planet går genom origo. Svaret är alltså $3y - 2z = 0$.

8 Vi bestämmer de två vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_3P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som spänner upp planet. En normal till planet ges då av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planet har en ekvation på formen $x - y + d = 0$. För att bestämma d sätter vi in t ex punkten P_3 och får $-1 + d = 0$ och slutligen alltså att ekvationen är

$$x - y + 1 = 0.$$

9 a) En riktningsvektor ges av

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -1 - 3 \\ 5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

är en ekvation för linjen.

b) Det finns oändligt många plan som innehåller linjen och om vi tar ett plan med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$ så ligger linjen på detta om och endast om

$$0 = A(1+t)+B(3-4t)+C(4+t)+D = (A+3B+4C+D)+(A-4B+C)t$$

för alla t. Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ A - 4B + C = 0 \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med (vi subtraherar den första ekvationen från den andra)

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ -7B - 3C = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningarna $D = s$, $C = 7t$, $B = -3t$ och $A = -19t - s$ där s och t är fria parametrar. Ett exempel får vi om vi sätter $s = 1$ och $t = 0$:

$$-x + 1 = 0.$$

10 Låt $Q = (2, 2, 3)$. Då är Q en punkt på linjen. Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från P till linjen av

$$d = \sqrt{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{QP}_L\right\|^2}.$$

Vektorn

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är en riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$$

och

$$\left\|\overrightarrow{QP}_L\right\| = \frac{\left|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}\right|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|-10|}{\sqrt{14}} = 5\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{10 - 50/7} = \sqrt{20/7} = \frac{2}{7}\sqrt{35}$.

11 Om Q är en godtycklig punkt i planet så gäller att avståndet från P till planet ges av längden av den ortogonala projektionen, $\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}$, av $\overrightarrow{QP}$ på normalen till planet.

Vi väljer $Q = (1, -1, -1)$. Då är

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är en normalvektor. Det sökta avståndet blir då

$$\left\|\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}\right\| = \frac{\left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|}{\|\mathbf{n}\|}\frac{2+12}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

12 Vi ser att planens normaler

$$\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$$

är parallella och därmed är planen parallella och skär alltså inte varann. Avståndet mellan planen är samma överallt och vi kan beräkna det genom att ta en punkt på det första planet, t ex $P = (1, 4, 2)$ och beräkna avståndet ifrån den till det andra planet.

Låt Q vara punkten på det andra planet som ligger närmast P. Vi har att $\overrightarrow{PQ}$ är en normal till planet så $Q = (1 + 2t, 4 + t, 2 + 4t)$ för något t. Vi sätter in detta i planets ekvation (Q ligger ju på planet) och får ekvationen

$$0 = 2(1 + 2t) + (4 + t) + 4(2 + 4t) + 3 = 17 + 21t,$$

vilket har lösningen $t = -17/21$. Det ger att avståndet är

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\| t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right\| = \frac{17}{21}\sqrt{4+1+16} = \frac{17}{\sqrt{21}}.$$

13 Normalen till planet genom $(1, 1, 1)$ har ekvationen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Sätter vi in denna i planets ekvation och löser ut t så får vi den punkt som är den ortogonala projektionen av $(1, 1, 1)$ på planet. Vi får

$$0 = 1 + t + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t) + 4 = 10 + 14t,$$

så $t = -10/14 = -5/7$. Den sökta punkten är alltså

$$\begin{cases} x = 1 - 5/7 = 2/7 \\ y = 1 - 2\cdot 5/7 = -3/7 \\ z = 1 - 3\cdot 5/7 - 8/7. \end{cases}$$