Lösningar till utvalda uppgifter på veckoblad 4, Linjär algebra IT, VT2010

3.

a) Vi beräknar skalärprodukten

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_1 \cdot \left(\mathbf{v}_2 - \sum_{i=1}^{2-1} \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_i}{|\ \mathbf{u}_i\ |^2} \mathbf{u}_i \right) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{|\ \mathbf{u}_1\ |^2} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \end{aligned}$$

så alltså är de ortogonala.

b) Vi gör ett induktionsbevis över $m = i + j$. Vi har ett basfall redan från första deluppgiften, nämligen $i + j = 3$ vilket är det minsta fallet då $i \neq j$. Antag att påståendet är sant för alla par (i, j) där $i + j < m$. Vi ska visa att då gäller det även för $i + j = m$. Vi kan av symmetriskäl anta att $i < j$. Vi beräknar skalärprodukten och får

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j &= \mathbf{u}_i \cdot \left(\mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{|\ \mathbf{u}_k\ |^2} \mathbf{u}_k \right) \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_k}{|\ \mathbf{u}_k\ |^2} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0, \end{aligned}$$

där den näst sista likheten följer av induktionsantagandet eftersom $i + k < i + j$ så $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $k \neq i$. Alltså är $\mathbf{u}_i$ och $\mathbf{u}_j$ ortogonala.

Därmed följer det att det gäller för samtliga par (i, j).

6. Antag att A är symmetrisk, d v s att $A = A^t$. Låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara kolumnerna i A. Då gäller att

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = A^t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t \\ \mathbf{a}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^t\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Med andra ord så är $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ för alla i så $\mathbf{x}$ är ortogonal mot alla kolumnvektorerna, vilket var precis vad vi skulle visa.

7. Vi subtraherar C ifrån båda leden och får då $AXB = D - C$. Eftersom både A och B är inverterbara så kan vi multiplicera båda leden med dessa matrisers respektive inverser ifrån vänster respektive höger vilket ger

$$\begin{aligned} AXB = D - C &\Leftrightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(D - C)B^{-1} \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}(D - C)B^{-1} \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1}(D - C)B^{-1}. \end{aligned}$$

Alltså är $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$ en unik lösning till ekvationen.

11. Subtraherar vi två gånger den första ekvationen ifrån den andra så får vi

$$-5y - 2z = -8.$$

Parametrisera genom att (t ex) sätta $y = 2t$ vilket ger $z = 4 - 5t$. Löser vi ut x ur den första ekvationen får vi slutligen

$$x = 5 - 2y - 2z = 5 - 4t - 8 + 10t = -3 + 6t.$$

Vi får alltså

$$\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2t \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$$

(Observera att det finns oändligt många olika korrekta svar beroende på hur man väljer att parametrisera.)

14. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4-4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3-10/9-2\cdot 4/9 = 1$.

15. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 12 & 3 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger z fri, $y = (1 + z)/2$ och $x = 4 - 3z$.

16. Vi gör Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & -13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Från detta får vi en lösning med två fria parametrar och alltså geometriskt ett plan i $\mathbb{R}^5$. En parametrisering av planet ges av

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 13/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17.

(a) Man kan t ex ta vilka två kolumner som helst i A.

(b) Gausselimination ger

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 8 & -1\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 2 & -10\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

varifrån vi ser att det finns vektorer $\mathbf{c}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ saknar lösning. (I själva verket gäller det för alla vektorer utom det plan som spänns upp av två av kolumnerna i A.) Ett exempel är $\mathbf{c} = (0\ 0\ 1)^t$ då vi ser att denna inte kommer att påverkas av Gausseliminationen och sista ekvationen blir då $0 = 1$.

18. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 2 & a & 4\\ 2 & a & a & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & a+2 & -2\\ 0 & a-4 & a+2 & -4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & \frac{a+2}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2}-2 & -a\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{a+2}{2} & 1\\ 0 & 0 & a^2-4 & -2a\end{pmatrix}.$$

Denna har ej unik lösning om och endast om $a^2 - 4 = 0$, d v s om och endast om $a = \pm 2$. I dessa fall blir $-2a = \mp 4$ så ekvationssystemet saknar då lösning.

19. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 5 & a & 7\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & a+2 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a+\frac{5}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Från detta ser vi att vi har unik lösning om $a \neq -\frac{5}{2}$ och då $a = -\frac{5}{2}$ så har vi oändligt många lösningar. Svaret är alltså: inte för några värden alls.

20. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & a-b & -1 & 2\\ 2 & 4 & b+1 & a-2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & a-b & -1 & 2\\ 0 & 0 & b-5 & a-2\end{pmatrix}$$

Från detta ser vi att vi har determinanten lika med noll om och endast om $a = b$ eller $b = 5$.

Om $b = 5$ så blir sista ekvationen $0 = a - 2$ så då måste $a = 2$ för att vi ska kunna ha någon lösning. Detta fallet ger en lösning eftersom det inte blir några problem med de två första ekvationerna.

Om $a = b$, så får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-12. \end{pmatrix}$$

Denna har (oändligt många) lösningar om och endast om $3b - 12 = 0$, d v s $b = 4$.

Svaret är alltså: $(2, 5)$ och $(4, 4)$.

21. De fem punkterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar koefficientmatrisen med A och högerledsvektorn med $\mathbf{b}$ så ges minstakvadratlösningen av lösningen till $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Multiplikation med A^t ger

$$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \text{ och } A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 59 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 & 28 \\ 10 & 30 & 100 & 59 \\ 30 & 100 & 354 & 165 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 10 & 40 & 3 \\ 0 & 40 & 174 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 14 & -15 \end{pmatrix},$$

vilket ger $c = -15/14$, $b = 3/10 - 4(-15/14) = 321/70$ och $a = 28/5 - 6(-15/14) - 2(321/70) = 20/7$ så svaret blir

$$y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2.$$

22. De fem punkterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar koefficientmatrisen med A och högerledsvektorn med $\mathbf{b}$ så ges minstakvadratlösningen av lösningen till $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Multiplikation med A^t ger

$$A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \text{ och } A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 59 \\ 165 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 & 28 \\ 10 & 30 & 100 & 59 \\ 30 & 100 & 354 & 165 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 10 & 40 & 3 \\ 0 & 40 & 174 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 14 & -15 \end{pmatrix},$$

vilket ger $c = -15/14$, $b = 3/10 - 4(-15/14) = 321/70$ och $a = 28/5 - 6(-15/14) - 2(321/70) = 20/7$ så svaret blir

$$y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2.$$