Lösningar till utvalda uppgifter på veckoblad 5, Linjär algebra IT, VT2010

3.

a) Genom att subtrahera andra kolumnen ifrån den tredje och sedan den första kolumnen ifrån den andra får vi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera sedan åter andra kolumnen ifrån den tredje:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu andra raden ifrån den tredje och därefter den första raden ifrån den andra:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu till slut återigen den andra raden ifrån den tredje och vi får en diagonal matris som vi lätt räknar ut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2x+3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Alternativt kan man förstås använda Sarrus regel och förenkla det sjättegradspolynom man får.

b) Antag att $n \geq 4$. De fyra första kolumnerna i A ser ut så här:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & \cdots \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & \cdots \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & \cdots \\ (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & (x+6)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar 3:e kolonnen ifrån den 4:e, 2:a kolonnen ifrån den 3:e och slutligen den 1:a kolonnen ifrån den 2:a. Detta ändrar inte värdet på determinanten och eftersom $(x+n)^2 - (x+(n-1))^2 = 2x + 2n - 1$ så får vi då:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 & 2x+9 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2x+9 & 2x+11 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar nu återigen 3:e kolonnen ifrån den 4:e och 2:a kolonnen ifrån den 3:e och får nu

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

eftersom två kolonner är identiska.

c) Det räcker att ta ett exempel och beräkna determinanten och se att den inte blir noll. Sätt t ex $x = 0$ vilket ger

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -8.$$

I själva verket är den -8 oavsett vilket x man väljer!

4. Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8 - 1) = -9 \neq 0,$$

så de är linjärt oberoende.

5. Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 2) = 0,$$

så de är linjärt beroende.

6. Vi beräknar determinanten för matrisen med vektorerna som kolumner och får $15 - 2a - a^2$. Vektorerna är linjärt beroende om och endast om determinanten är lika med 0. Vi löser alltså andragradsekvationen $15 - 2a - a^2 = 0$ vilket ger lösningarna $a_1 = -5$ och $a_2 = 3$.

9. Vi låter F vara matrisen som har $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Då gäller att $\mathbf{x}$ koordinater i standardbasen, $\mathbf{x}_E$, och dess koordinater i F-basen, $\mathbf{x}_F$, uppfyller

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E.$$

Eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$. Vi beräknar först

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får då

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E = F^t\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Kontrollera att det stämmer, d v s att $0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{5}{3} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(1, 1, 1)$:

$$0 \cdot \mathbf{f}_1 + \frac{5}{3} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \mathbf{f}_3 = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. Vi ska visa att vektorerna är parvis ortogonala och har längd 1 vilket är ekvivalent med att $M^tM = I$. Eftersom $2^2+3^2+6^2 = 4+9+36 = 49 = 7^2$ så har alla vektorerna längd 1. Dessutom är $2\cdot 3+3\cdot(-6)+6\cdot 2 = 6-18+12 = 0$ så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. På samma sätt får man att skalärprodukten mellan $\mathbf{v}_3$ och de andra vektorerna är 0 och därmed att de är parvis ortogonala.

12.

a) Betraktat i planet som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ så är avbildningen rotation kring origo $\pi/4$ radianer moturs. Denna har matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den tredje basvektorn är oförändrad så totalt blir matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Om $\mathbf{x}$ är koordinaterna i standardbasen och $\mathbf{x}_V$ är koordinaterna i basen V så gäller sambandet att $\mathbf{x} = V\mathbf{x}_V$. Vi får alltså

$$\mathbf{x} = V\mathbf{x}_V = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 3 & 7 & -3 \\ 3 & -12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+30+9 \\ 3+14-9 \\ 3-24+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

13.

a) Basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är oförändrade och $\mathbf{f}_3$ avbildas på nollvektorn så matrisen i basen F ges av

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Matrisen för L i standardbasen ges enligt känd sats av (observera att F är en ON-matris så $F^{-1} = F^t$)

$$\begin{aligned} A &= FA_FF^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -12 & 45 & 6 \\ 18 & 6 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14. Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\,1\,2)^t$ vara en normerad normalvektor till planet och bestäm $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ så att de har längd 1, är ortogonala och spänner upp planet. Man kan t ex ta $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,-1\,0)^t$ och $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ (eller direkt observera att) $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\,1\,-1)^t$ duger. I basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ har avbildningen matrisen

$$A_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ger att den i standardbasen har matrisen

$$A = FA_FF^{-1} = FA_FF^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man direkt utnyttja att

$$A = I - 2\mathbf{f}_1\mathbf{f}_1^t.$$

15.

a) Enligt definitionen av skalärprodukt gäller för vinkeln α mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

så $\alpha = \pi/3$ radianer eller 60 grader.

b) Vektorn $\mathbf{v}_3$ ska alltså ligga i planet och vara ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ så den ska uppfylla

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \text{ och } \mathbf{v}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

för några tal a och b. Om vi sätter in linjärkombinationen i den första ekvationen får vi

$$0 = (a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = a + b.$$

Vi har alltså lösningen $a = -b$ så

$$\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = a\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att få längd 1 sätter vi $a = 1/\sqrt{3}$.

c) Det finns två möjligheter och den som ger ett högerorienterat system är

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

17. Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ \ 0\ \ z)^t$, avbildas på nollvektorn. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet 0.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

18. Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ \ 0\ \ z)^t$, har spegelbild den vektor som är lika lång och pekar i precis motsatt riktning. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet -1.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

19. Alla vektorer i planet kommer att vara oförändrade så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är vinkelräta mot planet avbildas på nollvektorn så dessa har egenvärdet 0. Summerar vi så är alltså $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tre linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdena 1, 1 och 0. Några fler finns det inte, eftersom vi bara kan ha högst tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$.

20.

a) Den är reflexiv eftersom om vi väljer P att vara identitetsmatrisen så är $A = PAP^{-1}$ och därmed är A konjugerad med sig själv. Den är symmetrisk eftersom om $A = PBP^{-1}$ så är ju $B = P^{-1}AP$ så om A är konjugerad med B så är B konjugerad med A. Den är transitiv eftersom om $A = P_1BP_1^{-1}$ och $B = P_2CP_2^{-1}$, så är

$$A = P_1BP_1^{-1} = P_1P_2CP_2^{-1}P_1^{-1} = (P_1P_2)C(P_1P_2)^{-1}.$$

Med andra ord om A är konjugerad med B och B är konjugerad med C så är A konjugerad med C vilket precis är villkoret för transitiviteten.

Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den per definition en ekvivalensrelation.

b) Antag att A och B är konjugerade och att λ är ett egenvärde till A. Det räcker att visa att då är λ ett egenvärde också till B, ty då är alla egenvärden till A egenvärden till B och omvändningen följer av symmetrin.

Vi antar alltså att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $A = PBP^{-1}$ för en inverterbar matris P. Då får vi att

$$B(P^{-1}\mathbf{v}) = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{v} = P^{-1}A\mathbf{v} = P^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda P^{-1}\mathbf{v},$$

så λ är alltså ett egenvärde till B med egenvektorn $P^{-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

21.

a) Alla vektorer i planet som vi projicerar på, d v s alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, är oförändrade och är alltså egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är ortogonala mot planet, d v s multiplar av $\mathbf{v}_3$, avbildas på nollvektorn och är alltså egenvektorer med egenvärdet 0. Detta är alla egenvärden och egenvektorer då vi har tre linjärt oberoende egenvektorer.

b) Låt F vara matrisen som har basvektorerna som kolumner. I basen F är matrisen för avbildningen

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna är relaterad till matrisen A i standardbasen genom $A = FA_FF^{-1}$ och eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$ och vi får att

$$A = FA_FF^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$