

## Lösningar till utvalda uppgifter på veckoblad 6, Linjär algebra IT, VT2010

1.

a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$$

som har lösningarna  $x = 0$  och  $x = 1$  som därmed är de två egenvärdena. Egenvektorerna får man genom att dels lösa  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  som ger multiplar av  $(1 - 1)^t$  och dels

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

som har lösning alla multiplar av  $(1 \ 1)^t$ . Vi har alltså att 0 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av  $(1 - 1)^t$  och att 1 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av  $(1 \ 1)^t$ .

b) De två egenvektorerna är ortogonala. Multiplar av  $(1 \ 1)^t$  är oförändrade och de ortogonala vektorerna avbildas på nollvektorn. Därmed är det ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningvektor  $(1 \ 1)^t$ .

2. Den karakteristiska ekvationen ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 6 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

så egenvärdena är de två nollställena 1 och  $-2$ .

Sätter man in  $\lambda = 1$  så får man ekvationen  $-6x + 6y = 0$ , vilket ger egenvektorerna  $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Sätter man in  $\lambda = -2$  så får man ekvationen  $-3x + 6y = 0$ , vilket ger egenvektorerna  $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

4. Förutsättningarna ger att

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

med  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ . Den karakteristiska ekvationen blir då

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) - (1 - \alpha)(1 - \beta) \\ &= \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + (\alpha + \beta - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - (\alpha + \beta - 1)), \end{aligned}$$

så att  $A$  har alltså egenvärdena  $\lambda_1 = 1$  och  $\lambda_2 = \alpha + \beta - 1$ . Dessutom gäller att

$$\lambda_2 = \alpha + \beta - 1 \geq 0 + 0 - 1 \geq -1 \text{ och } \lambda_2 = \alpha + \beta - 1 \leq 1 + 1 - 1 \leq 1$$

och därmed är saken klar.

5. Ett alternativ är (förstås) nollmatrisen som har alla vektorer som egenvektorer med egenvärdet 0. Allmänt så ska den karakteristiska ekvationen ha 0 som dubbelrot. Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

så är karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Vi ska alltså ha  $a + d = 0$  och  $ad - bc = 0$ . Den första ger  $a = -d$  som insatt i den andra ger  $d^2 = -bc$ . En möjlighet är  $d = b = 1$  och  $a = c = -1$ , d v s

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.

- a) Vi vet att egenvärdena är nollställena till det karakteristiska polynomet  $\det(A - \lambda I) = 0$ . För en  $3 \times 3$ -matris är detta ett tredjegradspolynom. Om man räknar ut detta så får man

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + b\lambda + c,$$

där  $b$  och  $c$  är kombinationer av koefficienterna som vi inte behöver bry oss om. Allmänt för ett tredjegradspolynom  $p(x)$  gäller att om det har rötterna  $x_1$ ,  $x_2$  och  $x_3$  så är

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Alltså är summan av rötterna lika med minus koefficienten framför  $x^2$ . För det karakteristiska polynomet betyder det att summan av egenvärdena (som ju är summan av rötterna) är lika med  $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ . (Notera att det är minustecken framför  $\lambda^3$ .) Detta var precis det vi ville visa.

- b) Samma resonemang fungerar för en  $n \times n$ -matris och ett polynom av grad  $n$ . I detta fallet är koefficienten framför  $x^{n-1}$  lika med minus summan av rötterna och när man räknar ut det karakteristiska polynomet så får man grad  $n - 1$  på  $\lambda$  endast då man multiplicerar ihop alla elementen på diagonalen. Denna produkt ger

$$\prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda) = (-1)^n (\lambda^n - \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + \dots)$$

Vi ser alltså återigen att summan av egenvärdena, d v s summan av rötterna, är lika med summan av elementen på diagonalen.

7. Vi beräknar en diagonalisering av  $A$  för att lätt kunna beräkna den höga potensen. Vi beräknar egenvärdena till  $A$  genom att lösa

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4} ((1 - 2\lambda)^2 - 9),$$

som har lösningen  $2\lambda = 1 \pm 3$ , d v s  $\lambda = -1$  respektive  $\lambda = 2$ .

Motsvarande egenvektorer får vi genom att lösa ekvationssystemen

$$\begin{pmatrix} 1/2 - (-1) & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\begin{pmatrix} 1/2 - 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Dessa har lösningarna  $\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  respektive  $\mathbf{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Normerar vi så får vi ON-matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen av  $A$  blir då  $A = PDP^{-1}$  där  $D$  är diagonal med  $-1$  och  $2$  på diagonalen och  $P^{-1} = P^t$ . Till slut blir då

$$\begin{aligned} A^{1000} &= PD^{1000}P^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2^{1000} & 1 - 2^{1000} \\ 1 - 2^{1000} & 1 + 2^{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. Vi vet att en matris som uppfyller kraven är  $A = PDP^{-1}$ , där  $D$  är en diagsmatris med egenvärdena på diagonalen och  $P$  en matris med egenvektorerna som kolonner. Observera att de tre egenvektorerna är ortogonala, så vi kan välja  $P$  som en ON-matris genom att normera egenvektorerna. Därmed kommer vi att ha  $P^{-1} = P^t$ .

Vi sätter alltså t ex

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$A = PDP^t = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 34 & 12 & 0 \\ 12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

9.

- a) Vi vet att en  $3 \times 3$ -matris med tre linjärt oberoende egenvektorer är diagonaliserbar och vi använder diagonaliseringen baklänges här för att hitta  $A$  med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Sätt  $D$  som diagsmatrisen med egenvärdena på diagonalen och låt  $P$  vara matrisen med egenvektorerna som kolumner. Då

är  $A = PDP^{-1}$  en matris med de efterfrågade egenskaperna. Eftersom egenvektorerna är ortogonala kan vi normalisera dem så att  $P$  blir en ON-matris och därmed  $P^{-1} = P^t$ . Alltså med

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

så är ett exempel på en eftersökt matris

$$A = PDP^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Vi kan se att de tre vektorerna är linjärt beroende genom att t ex beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Det finns en sats som säger att egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende. Vi har alltså en motsägelse så det kan omöjligt vara så att dessa tre vektorer kan vara egenvektorer till de tre olika egenvärdena 2, 1 respektive  $-1$ . (Detta är också den enda sak som kan förstöra för oss för om de är linjärt oberoende så fungerar strategin vi använde i lösningen av första deluppgiften.)

**10.** Observera att  $A$  är symmetrisk så det är möjligt att hitta sådana matriser. Om  $A$  har egenvärdena  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  och  $\lambda_3$  med motsvarande normaliserade ortogonala egenvektorer  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{v}_3$  så är  $A = PDP^t$  där  $P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$  och  $D$  är diagonal med egenvärdena på diagonalen. Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 4) + 2(0 - 2(3 - \lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 11\lambda + 28) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 7). \end{aligned}$$

För att faktorisera polynomet använde vi tipset att  $\lambda = 1$  är ett egenvärde och löste sedan den återstående andragradsekvationen. Återstår nu att bestämma egenvektorerna.

$\lambda = 1$ : Likheten  $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$  ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger  $\mathbf{v}_1 = (1/3) \cdot (-1 \ 2 \ 2)^t$ .

$\lambda = 4$ : Likheten  $A\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v}_2$  ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger  $\mathbf{v}_2 = (1/3) \cdot (2 \ 2 \ -1)^t$ .

$\lambda = 7$ : Likheten  $A\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2$  ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger  $\mathbf{v}_3 = (1/3) \cdot (-2 \ 1 \ -2)^t$ .

Vi får alltså

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

**11.** Från satserna om diagonalisering så vet vi att en matris  $A$  som uppfyller kraven ges av

$$A = MDM^{-1},$$

där  $D$  är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen. Observera att  $M$  är en ON-matris så  $M^{-1} = M^t$ . Den är dessutom symmetrisk så i själva verket är  $M^{-1} = M$ . Vi får alltså

$$A = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 130 & 6 & -30 \\ 6 & 93 & -24 \\ -30 & -24 & 71 \end{pmatrix}$$

**12.** Eftersom  $A$  är en  $2 \times 2$ -matris med två olika egenvärden så är den diagonaliserbar,  $A = PDP^{-1}$ , där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

är en diagonalmatris. Vi får då att

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ där } D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Eftersom  $|\lambda_1| < 1$  och  $|\lambda_2| < 1$  så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0.$$

Därmed kommer  $D^n$  att närma sig nollmatrisen när  $n$  växer mot oändligheten och eftersom  $P$  är en konstant matris så kommer också  $A^n$  att närma sig nollmatrisen när  $n$  växer mot oändligheten. Det betyder att alla elementen i  $A^n$  närmar sig 0 och därmed att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\| = 0.$$