MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2010-03-11.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Ragnar Freij, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Bestäm alla värden på parametern a sådana att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -ax-z=-1 \\ ax+(1+a)y+z=-1 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar och ge en parametrisering av lösningsmängden i de fall då det finns oändligt många lösningar. (6p)

2. Vi definierar två vektorer i rummet

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

   (a) Beräkna arean av parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

   (b) Bestäm ekvationen på normalform för planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(6p)

3. Låt $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ vara rotation moturs $\pi/4$ radianer kring origo och $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ortogonal projektion på linjen $y=-x$. Beräkna matrisen för sammansättningen $f\circ g\circ f^{-1}$. (6p)

4. Låt R vara den riktade grafen i figur 1 på nästa sida.

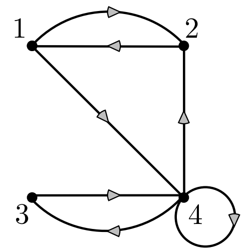
   (a) Bestäm grannmatrisen till R.

   (b) Motivera med matrisalgebra att R är starkt sammanhängande.

   (c) Använd matrisalgebra för att beräkna hur många olika vägar det finns av längd 6 från nod 4 till nod 2.

(7p)

Var god vänd!



Figur 1: Riktade grafen till uppgift 4.

5. Vi definerar en bas $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ för $\mathbb{R}^2$ där $\mathbf{f}_1 = \binom{1}{2}$ och $\mathbf{f}_2 = \binom{3}{1}$, och en linjär avbildning $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller $g(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2$ och $g(\mathbf{f}_2) = 3\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$.

   (a) Bestäm koordinaterna i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ för standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$ och $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$.

   (b) Bestäm matrisen A_F för den linjära avbildningen g relativt basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$.

   (c) Bestäm matrisen A för den linjära avbildningen g relativt standardbasen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

   (7p)

6. Låt $P = (1, 4, -1)$ och låt L_1 vara linjen som går genom punkten $R = (2, 0, -2)$ och har riktningsvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t$.

   (a) Bestäm den punkt Q på linjen L_1 som ligger närmast P.

   (b) Ge ekvationen (på parameterform) för en linje L_2 genom P som är sådan att P är den unika punkt på L_2 som ligger närmast L_1.

   (6p)

7. Låt A vara en godtycklig $m \times n$-matris.

   (a) Visa att det finns ON-matris P och diagonal matris D så att $AA^t = PDP^t$.

   (b) Bestäm sådana matriser P och D om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (6p)

8. Låt M vara övergångsmatrisen för en Markovkedja med n noder, så M är en $n \times n$-matris.

   (a) Visa att n-vektorn $\mathbf{1}_n$ som bara innehåller ettor är en egenvektor till M.

   (b) Vad är egenvärdet till $\mathbf{1}_n$?

   (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 19 mars. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.