Sammanfattning föreläsning 10, Linjär algebra IT, VT2010

En *determinant* är en funktion som till varje kvadratisk matris A ordnar ett tal $\det A$ med följande egenskaper:

1. Determinanten är en linjär avbildning av varje rad.
2. Om två rader är lika så är determinanten noll.
3. Determinanten av identitetsmatrisen är ett.

Antag att vi gör en elementär radoperation på en matris A och får en matris B. Då gäller att om radoperationen är

- byte av två rader så är $\det B = -\det A$.
- multiplikation av rad med ett tal k så är $\det B = k \cdot \det A$
- addition av multipel av rad till annan rad så är $\det B = \det A$.

Antag att A är en övertriangulär eller undertriangulär matris med diagonalelement a_{ii}. Då gäller att $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Det finns en unik determinant för $n \times n$-matriser och den ges av

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \epsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

där S_n är mängden av permutationer av $\{1, 2, \ldots, n\}$ och $\epsilon(\pi)$ är 1 eller -1 beroende på om π är jämn eller udda.
För alla matriser gäller $\det A = \det A^t$.
Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende om enda lösningen till

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är linjärt beroende.
Vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.
Vektorerna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ säges utgöra en bas för V om varje vektor $\mathbf{v} \in V$ kan skrivas som en unik linjärkombination av vektorerna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Om $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ är en bas och

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är $\mathbf{v}$:s koordinater i basen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.
En mängd n-vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om $r = n$ och de är linjärt oberoende.