Sammanfattning föreläsning 12, Linjär algebra IT, VT2010

Låt A vara en $n \times n$-matris. En n-vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som är sådan att

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

kallas för en egenvektor till A. Talet λ kallas för ett egenvärde till A.

Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ och $c \neq 0$, så gäller att också $c\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ.

Antag att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ, d v s $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m för alla $m \in \mathbb{N}$ med egenvärdet λ^m, d v s

$$A^m\mathbf{v} = \lambda^m\mathbf{v}.$$

Om A är inverterbar så gäller också att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m med egenvärdet λ^m för alla negativa m. Speciellt är då

$$A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$$

så A^{-1} har egenvektor $\mathbf{v}$ med egenvärde $1/\lambda$.

Egenvärdena till en matris A är nollställen till den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Egenvärdena till en triangulär matris är lika med elementen på diagonalen.

Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende.

En (kvadratisk) matris med k olika egenvärden har åtminstone k linjärt oberoende egenvektorer. Speciellt gäller att en $n \times n$-matris med n olika egenvärden har n stycken linjärt oberoende egenvektorer som alltså utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.