Sammanfattning föreläsning 13, Linjär algebra IT, VT2010

En symmetrisk (reell) matris har enbart reella egenvärden.

Antag att A är en symmetrisk $n \times n$-matris. Då är egenvektorer $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$ ortogonala om de hör till olika egenvärden μ respektive λ.

Spektralsatsen för symmetriska matriser: Antag att A är en $n \times n$-matris. Då har A n stycken ortogonala egenvektorer om och endast om A är symmetrisk.

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om det finns inverterbar matris P och diagonal matris D sådana att

$$A = PDP^{-1}.$$

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar $A = PDP^{-1}$ om och endast om den har n stycken linjärt oberoende egenvektorer. Elementen på diagonalen är egenvärdena till A och kolumnerna i P innehåller motsvarande egenvektorer.

Till varje symmetrisk matris A finns det diagonal matris D och ON-matris P sådana att

$$A = PDP^t.$$

Om A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, så gäller att också A^n är diagonaliserbar för $n \in \mathbb{N}$ och

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Om A är inverterbar så är också A^n för negativa heltal n diagonaliserbar med samma formel. Speciellt är

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Låt A vara en $m \times n$-matris. Då finns det matriser U, V och Σ sådana att:

1. $A = U\Sigma V^t$.
2. U är en ON-matris av storlek $m \times m$.
3. V är en ON-matris av storlek $n \times n$.
4. Σ är en 'diagonal' matris av formen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \sigma_r & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Faktoriseringen $A = U\Sigma V^t$ kallas för en singulärvärdesuppdelning (SVD) av A och $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ kallas för A:s singulärvärden.