Sammanfattning föreläsning 2, Linjär algebra IT, VT2010

Skalärprodukten uppfyller följande räkneregler:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),\ c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Den ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på linjen L, $\mathbf{v}_L$, definieras som den vektor som är parallell med L och sådan att $\mathbf{v} - \mathbf{v}_L$ är ortogonal mot L.
Den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen L med riktningsvektor $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} \ \text{ så speciellt är } \ \|\mathbf{v}_L\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på ett plan π, $\mathbf{v}_\pi$, definieras som den vektor som ligger i planet π och sådan att $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\pi$ är en normal till π.
En vektortrippel $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ i rummet säges vara högerorienterad om vyn från $\mathbf{w}$:s spets ger att minsta vridningen från $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$ är moturs (positiv). Om det är tvärtom så säges den vara vänsterorienterad. ((Tumme, pekfinger, långfinger) på *höger* hand är högerorienterade.)
Vektorprodukten, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, mellan två vektorer i rummet $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som den unika vektor som uppfyller:

1. om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\alpha$ med α minsta vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, d v s lika med arean av parallellogrammet som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ utgör ett högersystem.

Räkneregler för vektorprodukt:

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
2. $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v}),\ c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

Låt $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ vara tre parvis ortogonala enhetsvektorer och $\mathbf{v}$ en vektor i rummet med $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ för några reella tal x, y och z. Vi kallar x, y och z för $\mathbf{v}$:s koordinater med avseende på basen ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) och skriver

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$