Sammanfattning föreläsning 4, Linjär algebra IT, VT2010

En matris är ett tvådimensionellt fält (array) med reella tal. En matris sägs vara av typ $m \times n$, eller en $m \times n$-matris, om den har m rader och n kolumner.
Summan av matriserna A och B, $C = A + B$, ges av $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Produkten av A och k, $C = kA = Ak$, genom $c_{ij} = ka_{ij} = a_{ij}k$.
Produkten $A \cdot \mathbf{v}$ ges av

$$A \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Räkneregler för dessa operationer är

1. $A + B = B + A$
2. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
3. $(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v}$
4. $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = (cA)\mathbf{v}$

Fixera en 2×2-matris alternativt 3×3-matris A och låt V vara mängden av vektorer i planet alternativt mängden av vektorer i rummet beroende på storleken på A. Matrisavbildningen m a pA är då $f_A : V \longrightarrow V$

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}.$$

Låt V och W vara två mängder av vektorer. En avbildning $f : V \longrightarrow W$ säges vara linjär om

$$\begin{cases} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), & \text{för alla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ f(c\mathbf{v}) = c \cdot f(\mathbf{v}), & \text{för alla } \mathbf{v} \in V \text{ och } c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Bassatsen) Låt V vara alla vektorer i rummet och $f : V \longrightarrow V$ en linjär avbildning. Då gäller att $f = f_A$ för en matris A, d v s f är en matrisavbildning, och

$$A = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_x) & f(\mathbf{e}_y) & f(\mathbf{e}_z) \end{pmatrix}.$$

Varje matrisavbildning är en linjär avbildning och omvänt är varje linjär avbildning på en mängd geometriska vektorer en matrisavbildning.