Sammanfattning föreläsning 6, Linjär algebra IT, VT2010

Determinanten av en 2×2-matris A är

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Låt D vara parallellogrammet som spänns upp av kolumnerna i A. Då gäller att

$$\text{area}(D) = |\det A| .$$

Speciellt gäller också att $\det A = 0$ om och endast om kolumnerna i A är parallella.
Determinanten av en 3×3-matris A är

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1).$$

Om

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad \text{så är} \quad \det A = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Dessutom gäller att om V är volymen av parallellepipeden som spänns upp av kolumnerna i A så gäller att

$$\det A = \begin{cases} V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är högerorienterad,} \\ -V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är vänsterorienterad.} \end{cases}$$

Räkneregler för determinant

1. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
2. $\det \begin{pmatrix} c\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$
3. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{u} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{pmatrix}$
4. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}_2 \end{pmatrix}$
5. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = 0$
6. $\det A = \det A^t$

För 2×2-matriser respektive 3×3-matriser är

$$I_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ respektive } I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unika identiteter (för multiplikation).
En 2×2-matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

har en invers A^{-1} om och endast om $\det A \neq 0$ och i så fall är den

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$