Sammanfattning föreläsning 8, Linjär algebra IT, VT2010

En n-*vektor*, $\mathbf{v}$ definieras som en ordnad n-tupel av reella tal och vi skriver

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Mängden av alla n-vektorer betecknas med $\mathbb{R}^n$.

Operationer definieras i analogi med formlerna för geometriska vektorer i koordinatform så t ex

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \text{och} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är *parallella* om det finns ett reellt tal $c \neq 0$ så att $c\mathbf{u} = \mathbf{v}$ och de är *ortogonala* om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Pythagoras sats: Två n-vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala om och endast om $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Standardbasen för $\mathbb{R}^n$ är $E = \{\mathbf{e}_i : 1 \leq i \leq n\}$, där $\mathbf{e}_i$ är den n-vektor som har koordinat i lika med 1 och övriga koordinater lika med 0. Varje vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som en unik linjärkombination av vektorerna i standardbasen.

Om A är en $m \times n$-matris och $\mathbf{v}$ en n-vektor så är produkten $A \cdot \mathbf{v}$ m-vektorn

$$A \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{a}_i.$$

Om A är en $m \times n$-matris och B en $n \times p$-matris så är produkten $A \cdot B$ $m \times p$-matrisen

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{pmatrix}.$$

På elementnivå blir det för $C = AB$, att

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{för } 1 \leq i \leq m \text{ och } 1 \leq j \leq p.$$

Fixera en $m \times n$-matris A. Matrisavbildningen map A är $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Detta är en linjär avbildning och omvänt är varje linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en matrisavbildning med matris

$$A = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$