Veckoblad 1, Linjär algebra IT, VT2010

Under den första veckan ska vi gå igenom (i alla fall stora delar av) kapitel 1 som handlar om geometriska vektorer. De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten i kapitlet är följande:

- Geometrisk vektor med egenskaperna längd och riktning.
- Likhet mellan vektorer.
- Operationerna vektoraddition och multiplikation med skalär samt räknereglerna för dessa.
- Begreppet linjärkombination av vektorer.
- Skalärprodukt mellan två vektorer och dess relation till vinkeln mellan vektorerna.
- Ortogonal projektion på linje och plan.
- Räkneregler för skalärprodukt.
- Formel för ortogonal projektion på linje i termer av skalärprodukter.
- Vektorprodukt mellan två vektorer och dess relation till arean av ett parallellogram samt till en normal till ett plan.
- Räkneregler för vektorprodukt.
- Begreppen koordinatsystem och koordinater för vektorer.
- Formel för skalärprodukt i termer av koordinater.
- Formel för vektorprodukt i termer av koordinater.
- Ekvationen för en linje i planet på normalform.
- Ekvationen för en linje på parameterform.
- Ekvationen för ett plan i rummet på normalform.
- Ekvationen för ett plan på parameterform.
- Avstånd mellan punkt och linje samt mellan punkt och plan.

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Addera vektorer geometriskt med hjälp av trigonometri.
- Bevisa enkla geometriska resultat med hjälp av vektoralgebra.
- Beräkna skalärprodukten mellan två vektorer givet vinkeln mellan dem och dess längder.
- Beräkna skalärprodukten mellan två vektorer givet dess koordinater.
- Beräkna längden av en vektor givet dess koordinater.
- Bestämma enhetsvektor med given riktning.
- Beräkna vinkeln mellan två vektorer (med hjälp av skalärprodukt).
- Beräkna ortogonala projektionen av en vektor på en linje i planet eller i rummet.
- Beräkna speglingen av vektor i en linje.
- Beräkna ortogonala projektionen av en vektor på ett plan.
- Beräkna speglingen av vektor i ett plan.
- Beräkna vektorprodukten mellan två vektorer givet dess koordinater.
- Beräkna arean av ett parallellogram givet två vektorer som spänner upp det.
- Beräkna normalen till en linje i planet.
- Beräkna normalen till ett plan (i rummet).
- Växla mellan ekvation på normalform och ekvation på parameterform för linje i planet.
- Bestämma ekvation för en linje givet två punkter.
- Bestämma ekvation för en linje givet en punkt och en riktningsvektor eller normal.
- Växla mellan ekvation på normalform och ekvation på parameterform för plan i rummet.
- Bestämma ekvation för ett plan givet tre punkter.
- Bestämma ekvation för ett plan givet en punkt och två vektorer i planet.
- Bestämma ekvation för ett plan givet en punkt och en normal.
- Beräkna avståndet från en punkt till en linje.
- Beräkna avståndet från en punkt till ett plan.

Övningsuppgifter

Avsnitt 1.1 och 1.2

1 Rita på ett rutat papper in vektorerna $\mathbf{u}$ som är 3 rutor åt höger och 1 ruta uppåt, $\mathbf{v}$ som är 2 rutor åt höger och 3 rutor uppåt samt $\mathbf{w}$ som är 1 ruta åt vänster och 5 rutor nedåt.

a) Rita in linjärkombinationerna $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{w} + \mathbf{v}$ och $(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) - \mathbf{w}$.

b) Motivera grafiskt att $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ för dessa tre vektorer.

c) Bestäm en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som är lika med $\mathbf{w}$.

2 En silvertärna flyger på hösten med näbben riktad rakt mot sydpolen med en fart som i vindstilla förhållanden skulle varit 40 km/h.

a) Antag att det blåser en kraftig västlig vind som påverkar tärnan med 10 km/h. Vad blir då tärnans fart och hur mycket avviker riktningen ifrån rakt sydlig?

b) Samma fråga som föregående men vinden är istället sydvästlig.

c) Antag återigen att vinden är västlig. Hur mycket ska den ändra sin flygriktning om den vill flyga rakt söderut och vad blir då den verkliga farten?

3 Låt $ABCD$ vara ett parallellogram och låt E vara mittpunkten på diagonalen $\overrightarrow{AC}$ och F mittpunkten på sidan $\overrightarrow{DC}$.

a) Uttryck vektorn $\overrightarrow{AE}$ som linjärkombination av vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$.

b) Uttryck sidorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ som linjärkombinationer av diagonalerna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BD}$.

c) Uttryck vektorn $\overrightarrow{AF}$ i termer av diagonalerna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BD}$.

4 Bevisa regel 5 i proposition 1.8. Tänk på att det blir olika fall beroende tecknet på c och d.

5 Bevisa regel 3 i proposition 1.8 i fallet då $c < 0$. Använd kompendiets bevis för fallet $c > 0$ som mall.

6 (*) Visa med vektoralgebra att diagonalerna i ett parallellogram skär varandra mitt itu.

7 (*) På sidorna i ett godtyckligt parallellogram ritas kvadrater som alla ligger utanför parallellogrammet. Visa att mittpunkterna i dessa kvadrater är hörn i en ny kvadrat.

Avsnitt 1.3

1 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två enhetsvektorer och antag att vinkeln mellan dem är $\pi/3$.

a) Vad är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$?

b) Vad är $(3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + 5\mathbf{v})$?

c) Vad är $\|3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\|$?

d) Vad är ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på en linje med riktningsvektor $\mathbf{v}$?

2 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer och antag att $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$ Vad är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$?

3 *Speglingen* av en vektor $\mathbf{v}$ i en linje L är vektorn $\mathbf{v}_S$ som ges av

$$\mathbf{v}_S = 2\mathbf{v}_L - \mathbf{v}.$$

a) Visa att $\mathbf{v} - \mathbf{v}_L = \mathbf{v}_L - \mathbf{v}_S$.

b) Rita upp vektorerna $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_L$ och $\mathbf{v}_S$ för att se varför $\mathbf{v}_S$ kallas för speglingen i linjen L.

c) Antag att $\mathbf{u}$ är en riktningsvektor för linjen L. Ge en formel för $\mathbf{v}_S$ uttryckt i $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

4 Bestäm två vektorer i rummet som spänner upp ett parallellogram vars diagonaler **inte** är ortogonala samt har längd 3 respektive 1.

5 Bevisa att den ortogonala projektionen på en linje L uppfyller

$$\mathbf{u}_L + \mathbf{v}_L = (\mathbf{u} + \mathbf{v})_L$$

för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

6 (*) Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ vara två godtyckliga vektorer.

a) Visa att $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ och $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ har samma längd om och endast om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är ortogonala.

b) Översätt detta till ett geometriskt påstående om diagonalerna i ett parallellogram.

7 (*) Antag att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer som bildar vinkeln $\pi/3$ radianer och vars längder uppfyller att $\mathbf{u}$ är dubbelt så lång som $\mathbf{v}$. Vad är (minsta) vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

8 (*) Två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ har samma längd. Vinkeln α mellan dessa uppfyller att $\cos\alpha = 1/3$. Vi bildar två linjärkombinationer av dessa

$$\mathbf{u} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \text{ och } \mathbf{v} = c\mathbf{x} + d\mathbf{y},$$

där a, b, c och d är reella tal.

a) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (uttryckt i a, b, c och d).

b) Ge exempel på konstanter a, b, c och d sådana att alla fyra är skilda från noll samt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta.

9 (*) Beräkna med hjälp av vektoralgebra och skalärprodukt att den spetsiga vinkeln mellan två rymddiagonaler i en kub. (En rymddiagonal är den sträcka som går från ett hörn inuti kuben till det motsatta hörnet.) Observera att det finns fyra stycken rymddiagonaler.

Avsnitt 1.4

1 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer med $\|\mathbf{u}\| = 2$ och $\|\mathbf{v}\| = 3$ och antag att vinkeln mellan dem är $\pi/4$.

a) Vad är $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$?

b) Vad är arean av parallellogrammet som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp?

2 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två enhetsvektorer och antag att vinkeln mellan dem är $\pi/6$.

a) Vad är $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$?

b) Vad är $\|3\mathbf{u} \times 4\mathbf{v}\|$?

c) Vad är arean av parallellogrammet som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp?

d) Uttryck $(3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + 5\mathbf{v})$ som en multipel av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

3 Antag att $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är högerorienterad. Ange orienteringen hos följande trippler:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),\ (-\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),\ (\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{w})\ \text{ och }\ (-\mathbf{w}, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$$

4 Bevisa den andra likheten i regel 2 i proposition 1.29.

5 För vilka vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet gäller det att

a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

b) (*) $((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(Ett villkor i taget. Inte båda tillsammans.) Svaren ska motiveras!

6 (*) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två ickeparallella vektorer i planet alternativt i rummet. Låt P_1 vara parallellogrammen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som diagonalvektorer och låt P_2 vara parallellogrammen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som sidor (som spänns upp av dessa). Visa att arean av P_2 är dubbelt så stor som arean av P_1 (både i rummet och i planet).

Avsnitt 1.5

1 Vi har 4 punkter i rummet, $P = (1, -4, -3)$, $Q = (-2, -6, 1)$, $R = (5, 1, -1)$ och $S = (2, -1, 3)$.

a) Bestäm koordinaterna för vektorerna $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$ och $\overrightarrow{QS}$.

b) Bestäm koordinaterna för vektorerna $2\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{SR}$ och $3\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{QS}$.

c) Motivera att de fyra punkterna är hörn i ett parallellogram.

2 Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm två enhetsvektorer som är parallella med $\mathbf{v}$. (Finns det fler sådana enhetsvektorer?)

b) Bestäm två enhetsvektorer som är ortogonala mot $\mathbf{v}$. (Finns det fler sådana enhetsvektorer?)

c) Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ som har samma riktning som $\mathbf{v}$ och som har $\|\mathbf{w}\| = 2$.

3 Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm två enhetsvektorer som är parallella med $\mathbf{v}$. (Finns det fler sådana enhetsvektorer?)

b) Bestäm två enhetsvektorer som är ortogonala mot $\mathbf{v}$. (Finns det fler sådana enhetsvektorer?)

c) Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ som har samma riktning som $\mathbf{v}$ och som har $\|\mathbf{w}\| = 7$.

4 Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Beräkna $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

b) Beräkna ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på en linje L med $\mathbf{w}$ som riktningsvektor.

c) Beräkna speglingen av $\mathbf{v}$ i en linje L med $\mathbf{w}$ som riktningsvektor. Se uppgift 3 i avsnitt 1.3 för definitionen av spegling.

5 Vad är vinkeln mellan vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

6 Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ sådan att vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är 60 grader.

7 Vi definierar två vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

där x är en parameter.

a) Bestäm alla värden på x som gör att vektorerna är ortogonala.

b) Ge en vektor som är parallell med $\mathbf{v}$ och som har längd 1.

c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u}$ på linjen L med $\mathbf{v}$ som riktningsvektor. (Den kommer att bero på x.)

8 Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Beräkna $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

b) Beräkna arean av parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

c) Bestäm en enhetsvektor som är normal till planet som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

9 Visa med hjälp av vektorprodukt att vektorerna

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$$

alla ligger i ett plan.

10 Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vara tre vektorer. Mellan vilket par av dessa vektorer är vinkeln störst?

11 (*) Vektorerna $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ spänner upp ett plan genom origo. Bestäm en vektor i detta plan (skild från nollvektorn) som är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

Avsnitt 1.6

1 Vi har fyra linjer med följande ekvationer på parameterform

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = 5 + 2t, \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} x = -2 - 15t \\ y = 3 + 3t \\ z = -5 - 6t \end{cases} \quad L_3 : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad L_4 : \begin{cases} x = -3 + 10t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

a) Vilka av linjerna är parallella?

b) Vilka av linjerna är lika?

2 Låt $P_1 = (1, 2)$ och $P_2 = (5, -1)$ och låt L vara linjen genom dessa två punkter.

a) Bestäm en ekvation på normalform för L.

b) Bestäm en ekvation på parameterform för L.

3 Låt L vara linjen

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 - t \end{cases} .$$

Bestäm en ekvation för L på normalform.

4 Låt L vara linjen $7x - 2y = 6$. Bestäm en ekvation för L på parameterform.

5 Bestäm en ekvation på normalform för planet som är parallellt med $x + 3y + 4z + 7 = 0$ och som innehåller punkten $(2, -2, 2)$.

6 Bestäm en ekvation på parameterform för planet $x + 3y + 4z + 7 = 0$.

7 Bestäm en ekvation på normalform för planet genom origo som innehåller linjen

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

8 Bestäm en ekvation på normalform för planet som innehåller punkterna $P_1 = (1, 2, 3),\ P_2 = (4, 5, 6)$ och $P_3 = (0, 1, 3)$.

9 a) Bestäm en ekvation (på parameterform) för den linje L som går genom punkterna $(1, 3, 4)$ och $(2, -1, 5)$.

b) Bestäm en ekvation på normalform för ett plan som innehåller L.

10 Bestäm avståndet från punkten $(1, 2, 0)$ till linjen

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

11 Beräkna avståndet från punkten $P = (1, 0, 3)$ till planet $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

12 Bestäm avståndet mellan planen $2y + 4x + 8z = 28$ och $2x + y + 4z + 3 = 0$.

13 Bestäm ortogonala projektionen av punkten $(1, 1, 1)$ på planet

$$x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

Facit

Avsnitt 1.1 och 1.2

1 c) $\mathbf{w} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

2 a) Farten blir $10\sqrt{17} \approx 41.2$ km/h och avvikelsen $\arctan \frac{1}{4} \approx 14.0$ grader.

b) Farten blir $10\sqrt{17 - 4\sqrt{2}} \approx 33.7$ km/h och avvikelsen $\arctan \frac{4\sqrt{2}+1}{31} \approx 12.1$ grader.

c) Den ska ändra riktningen $\arcsin \frac{1}{4} \approx 14.5$ grader och får då farten $10\sqrt{15} \approx 38.7$ km/h.

3 a) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ och $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

4

5

6 Lösning kommer

7 Lösning kommer

Avsnitt 1.3

1 a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{-23}{2}$

c) $\sqrt{37}$

d) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$

2 $2\pi/3$

3 *Speglingen* av en vektor $\mathbf{v}$ i en linje L är vektorn $\mathbf{v}_S$ som ges av

$$\mathbf{v}_S = 2\mathbf{v}_L - \mathbf{v}.$$

a) Bara att lösa ut $\mathbf{v}_S$.

b) Om man startar $\mathbf{v}$ på L så är spetsarna av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_S$ varandras spegelbilder i L.

c) $\mathbf{v}_S = 2\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} - \mathbf{v}$

4 Lösning kommer

5 Tips: använd formeln för ortogonal projektion och räkneregler för skalärprodukt. Alternativt gör ett geometriskt bevis.

6 Lösning kommer

7 $\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$ Lösning kommer

8 Lösning kommer

a)

$$\beta = \arccos\frac{ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc)}{\sqrt{(a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)}}.$$

b) En lösning (bland oändligt många) är $a=b=c=1$ och $d=-1$.

9 $\arccos 13$ Lösning kommer

Avsnitt 1.4

1 a) $3\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}$

2 a) $\frac{1}{2}$

b) 6

c) $\frac{1}{2}$

d) $19(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

3 Högerorienterade: $(\mathbf{v},\mathbf{u},-w)$ och $(-\mathbf{w},\mathbf{u},-\mathbf{v})$. Vänsterorienterade: $(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})$ och $(-\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$

4 Tips: Använd den första likheten i regel 2 tillsammans med regel 1.

5 Lösning kommer

a) Alla.

b) $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella eller ortogonala.

6 Lösning kommer

Avsnitt 1.5

1 a) $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SR}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{QS}=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$.

b) $2\overrightarrow{PQ}+3\overrightarrow{SR}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$ och $3\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{QS}=\begin{pmatrix}-13\\-11\\10\end{pmatrix}$.

c) Tips: Kontrollera att två par av vektorer är lika.

2 a) $\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$. Nej!

b) $\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix}-7\\-5\end{pmatrix}$. Nej!

c) $\mathbf{w} = \frac{2}{\sqrt{74}}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$.

3 a) $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}$. Nej!

b) T ex $\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. Ja, det finns oändligt många!

c) $\frac{7}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$.

4 a) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = -2$

b) $\mathbf{v}_L = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{v}_S = \begin{pmatrix}-\frac{13}{5}\\-\frac{16}{5}\\3\end{pmatrix}$

5 $\arccos\frac{1}{2} = \pi/3$

6 T ex $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ eller $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Det finns oändligt många möjligheter.

7 a) $x = 3$

b) $\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ eller $-\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{u}_L = \frac{x-3}{11}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$

8 a) $-3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

b) $3\sqrt{14}$

c) $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

9 Beräkna vektorprodukten för två par av vektorer och kontrollera att dessa är parallella. Varför visar detta att vektorerna ligger i ett plan?

10 Mellan $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ $\left(\arccos -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

11 T ex $\begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$. Det finns oändligt många möjligheter. Lösning kommer

Avsnitt 1.6

1 a) L_1, L_2 och L_4

b) L_1 och L_4

2 a) $3x + 4y = 11$

b) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

3 $x + 5y = -13$

4 $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 7t \end{cases}$

5 $x + 3y + 4z - 4 = 0$

6 T ex $\begin{cases} x = t + 3s + 4t \\ y = -1 - s \\ z = -1 - t \end{cases}$ (De två riktningsvektorerna ska vara ortogonala mot normalvektorn.)

7 $3y - 2z = 0$

8 $x - y + 1 = 0$

9 a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$

b) T ex $-x + 1 = 0$. Det finns oändligt många.

10 $\frac{2}{7}\sqrt{35}$

11 $\sqrt{14}$

12 $\frac{17}{\sqrt{21}}$

13 $(2/7, -3/7, -8/7)$