Veckoblad 2, Linjär algebra IT, VT2010

Under den andra veckan ska vi avsluta det sista avsnittet 1.6 kapitel 1. Innan vi gör det ska vi dock på måndagen introducera matriser i avsnitt 2.1 inklusive operationerna addition och multiplikation mellan matris och vektor. Denna multiplikation är grunden till de ekvivalenta begreppen matrisavbildning och linjär avbildning från avsnitt 3.1 och 3.2 som vi också börjar titta på under måndagsföreläsningen. På tisdagens gruppövning kommer vi att jobba med linjära avbildningar så måndagens föreläsning är en introduktion till dessa övningar. Under torsdagen avslutar vi så avsnitt 1.6 och går också igenom resten av kapitel 2 som introducerar de olika operationerna på matriser.

De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten under veckan, undantaget de i avsnitt 1.6 som fanns på veckoblad 1, är följande:

- Begreppet matris.
- Operationerna matrisaddition och multiplikation med skalär samt räknereglerna för dessa.
- Multiplikation mellan matris och vektor.
- Matrismultplikation inklusive räkneregler.
- Transponat av matris samt symmetrisk matris.
- Determinant för 2×2-matris och 3×3-matris.
- Tolkning av determinant som area respektive volym.
- Begreppen identitetsmatris och invers till en matris.
- Existens och formel för invers till 2×2-matris.
- De ekvivalenta begreppen matrisavbildning och linjär avbildning.

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Addera matriser.
- Multiplicera en matris med en vektor.
- Avgöra när man kan multiplicera två matriser och räkna ut produkten.
- Lösa enkla matrisekvationer med hjälp av matrisalgebra.
- Beräkna transponatet av en matris.
- Beräkna determinanten av en 2×2-matris och 3×3-matris.
- Beräkna arean av parallellogrammet som två vektorer i planet spänner upp.
- Beräkna volymen av parallellepipeden som tre vektorer i rummet spänner upp.
- Avgöra orienteringen av tre vektorer i rummet.
- Använda räknereglerna för determinant för att beräkna determinanten utan att använda formeln från definitionen.
- Bestämma inversen till 2×2-matris.
- Avgöra om en avbildning (funktion) är linjär.

Övningsuppgifter

Avsnitt 2.1

1 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \ \text{och} \ D = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna $A + B$, $B + C$, $C + D$, $-3C$ och $2A + B$.

b) Bestäm alla matriser X som löser ekvationen $3A + 2X = 5B$.

2 Låt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{och} \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna $C\mathbf{u}$ och $C(2\mathbf{u})$.

b) Beräkna $D(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $D\mathbf{u} + D\mathbf{v}$.

c) Beräkna $(C + D)\mathbf{v}$ och $C\mathbf{v} + D\mathbf{v}$.

3 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potensen av en matris, M^n med $n \in \mathbb{N}$, definieras precis som för tal som upprepad multiplikation, d v s

$$M^n = \underbrace{M \cdot \ldots \cdot M}_{n \text{ stycken}}.$$

a) Beräkna AB, BA, A^2, BC, CD och DC.

b) Beräkna $A(A + B)$ och $A^2 + AB$.

c) Beräkna $A(BA)$ och $(AB)A$.

4 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna transponaten A^t, B^t, C^t och D^t.

b) Vilka av de fyra matriserna är symmetriska?

c) Beräkna $(AB)^t$, A^tB^t och B^tA^t.

5 Fullfölj bevisen av räknereglerna i avsnittet genom att bevisa

a) den andra likheten i regel 4 i proposition 2.11.

b) den andra likheten i regel 1 i proposition 2.16.

c) regel 3 i proposition 2.16.

Avsnitt 2.2

1 Låt

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Beräkna $\det A$, $\det B$, $\det C$ och $\det C^t$.

b) Vad är arean av de parallellogram som kolumnerna i A respektive B spänner upp.

c) Vad är volymen av den parallellepiped som kolumnerna i C spänner upp.

d) Vad är volymen av den parallellepiped som *raderna* i C spänner upp.

e) Låt α vara vinkeln från $\mathbf{a}_1$ till $\mathbf{a}_2$ i positiv riktning, så alltså inte nödvändigtvis den minsta vinkeln mellan $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$. Vad kan säga om det intervall där α finns baserat på tecknet hos $\det A$? Beräkna α.

f) Vad har $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ för orientering?

2 Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3 Visa att följande determinanter är 0 med hjälp av räknereglerna i proposition 2.30. Ange i varje steg vilken eller vilka regler du utnyttjar.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{och} \quad \det C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -5 & 7 \end{vmatrix}.$$

4 Bevisa att $\det A = \det A^t$ om A är en 2×2-matris eller 3×3-matris. Tips: Det enklaste sättet är att helt enkelt räkna ut determinanterna för en godtycklig matris med hjälp av formlerna och jämföra. (Detta är regel 6 i proposition 2.28.)

5 (*) Låt x vara ett godtyckligt reellt tal. Vi definierar A som den 3×3-matris som har elementen $a_{ij} = (x + i + j - 2)^2$. Visa att $\det(A) = -8$ oavsett vad x är.

Avsnitt 2.3

1 Beräkna inversen, om den existerar, till följande matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2 Bevisa att om A och B är inverterbara så är också AB inverterbar och

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3 a) Antag att A, B, C och D är $n \times n$-matriser och att A och B är inverterbara. Lös matrisekvationen $AXB + C = D$.

b) Antag att A, B och C är $n \times n$-matriser och att A och $I_n + B$ är inverterbara. Lös matrisekvationen $AXB + C = D - AX$.

4 (*) Låt M vara mängden av alla 2×2-matriser där alla 4 elementen är heltal samt determinanten är 1. Ett exempel på en matris som finns i M är

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För en matris A i M definierar vi en reell funktion

$$f_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; f_A(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ om } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Motivera att om $A \in M$ så gäller att A^{-1} existerar samt $A^{-1} \in M$.

b) Visa att för alla matriser A och B i M gäller att

$$f_A \circ f_B = f_{AB}.$$

5 (*) Spåret av en matris är summan av elementen på diagonalen. Vi betecknar spåret av en matris A med $sp(A)$, så speciellt för en 2×2-matris har vi att

$$sp(A) = a + d, \text{ om } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vi betecknar (som vanligt) determinanten av matrisen A med $det(A)$. Låt A vara en 2×2-matris.

a) Visa att

$$A^2 - sp(A)A + det(A)I = 0,$$

där I är identitetsmatrisen och 0 (förstås) är en nollmatris.

b) Antag att $det(A) = 0$. Visa att i så fall är varje potens A^n med $n \in \mathbb{Z}_+$ en multipel av A, d v s $A^n = k_n A$ där $k_n \in \mathbb{R}$, samt bestäm k_n för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Avsnitt 3.1 och 3.2

1 Om P är en punkt i planet så låter vi P_S vara dess spegling i x-axeln. T ex om $Q = (2, 2)$ så är $Q_S = (2, -2)$. Vi definierar en funktion f på alla vektorer i planet genom att sätta $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP_S}$, så t ex är

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Visa att detta är en linjär avbildning.

2 Låt L vara linjen som är parallell med x-axeln och går igenom punkten $(0, 1)$. Om P är en punkt i planet så låter vi P_S vara dess spegling i linjen L. T ex om $Q = (2, 2)$ så är $Q_S = (2, 0)$. Vi definierar en funktion f på alla vektorer i planet genom att sätta $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP_S}$, så t ex är

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Visa att detta *inte* är en linjär avbildning.

3 Låt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och låt f_B vara matrisavbidningen m a p B. Beräkna $f_B(\mathbf{u})$, $f_B(\mathbf{v})$, $f_B(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $f_B(2\mathbf{u})$.

4 Låt

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och låt f_D vara matrisavbidningen m a p D. Beräkna $f_D(\mathbf{u})$, $f_D(\mathbf{v})$, $f_D(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $f_D(2\mathbf{u})$.

Facit

Avsnitt 2.1

1 a) $A+B=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $B+C$ är ej definierad, $C+D=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 4\\ -5 & 7 & 1\\ 7 & 11 & 8\end{pmatrix}$,

$-3C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 9 & -12 & 0\\ -21 & -6 & -15\end{pmatrix}$ och $2A+B=\begin{pmatrix}4 & -12\\ 12 & 7\end{pmatrix}$

b) $X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & 5\\ 8 & -4\end{pmatrix}$

2 a) $C\mathbf{u}=\begin{pmatrix}0\\ 10\\ 27\end{pmatrix}$ och $C(2\mathbf{u})=2(C\mathbf{u})=\begin{pmatrix}0\\ 20\\ 54\end{pmatrix}$.

b) $D(\mathbf{u}+\mathbf{v})=D\mathbf{u}+D\mathbf{v}=\begin{pmatrix}47\\ 23\\ 69\end{pmatrix}$

c) $(C+D)\mathbf{v}=C\mathbf{v}+D\mathbf{v}=\begin{pmatrix}25\\ 32\\ 27\end{pmatrix}$

a) $AB=\begin{pmatrix}-18 & -7\\ 20 & -5\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-6 & -16\\ 8 & -17\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}-19 & -20\\ 16 & -11\end{pmatrix}$, BC är odefinierad, $CD=\begin{pmatrix}-4 & -13 & 0\\ 4 & -3 & -14\\ -32 & 86 & 59\end{pmatrix}$, $DC=\begin{pmatrix}23 & 32 & 38\\ -4 & 14 & 9\\ -6 & 42 & 15\end{pmatrix}$.

b) $A(A+B)=A^2+AB=\begin{pmatrix}-37 & -27\\ 36 & -16\end{pmatrix}$

c) $A(BA)=(AB)A=\begin{pmatrix}-46 & 69\\ 0 & -115\end{pmatrix}$

3 a) $A^t=A,\ B^t=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ C^t=\begin{pmatrix}1 & -3 & 7\\ 0 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ D^t=D.$

b) A och D

c) $(AB)^t=B^tA^t=\begin{pmatrix}-18 & 2\\ -7 & 13\end{pmatrix},\ A^tB^t=\begin{pmatrix}12 & -1\\ -16 & -17\end{pmatrix}$.

Avsnitt 2.2

1 a) $\det A=-17$, $\det B=10$, $\det C=\det C^t=-78$

b) 17 respektive 10

c) 78

d) 78

e) $\pi < \alpha < 2\pi$, $\alpha = 2\pi - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{410}}\right) \approx 4.138$

f) Vänsterorienterad eftersom $\det C < 0$.

2 $343 = 7^3$

3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 2 & 4 & 2+4 \\ 3 & 6 & 3+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Det andra steget utnyttjar regel 4 och det tredje utnyttjar reglerna 3 och 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+3 \\ 2 & 7 & 2+7 \\ 0 & 3 & 0+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Det andra steget utnyttjar regel 4 och det tredje utnyttjar reglerna 3 och 5.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -5 & 7 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 3 \\ 12 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4+1 \\ 6 & -3 & 6-3 \\ 12 & -5 & 12-5 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \\ 12 & -5 & 12 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \\ 12 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Det första steget utnyttjar regel 2, det tredje steget utnyttjar regel 4 och det fjärde utnyttjar reglerna 3 och 5.

4

5 Lösning kommer.

Avsnitt 2.3

1 $A^{-1} = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, C är ej inverterbar.

2 Tips: Visa att $B^{-1}A^{-1}$ uppfyller kraven på att vara invers till AB genom lämpliga multiplikationer.

3 Observera att ordningen på faktorerna är viktig.

a) $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$

b) $X = A^{-1}(D - C)(I_n + B)^{-1}$

4 Lösning kommer.

5 Lösning kommer.

Avsnitt 3.1 och 3.2

1 Den allmänna formeln för funktionen är

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

och

$$f\left(c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} cx \\ -(cy) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = c \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

och alltså är f linjär.

2 Vi har t ex att

$$f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

så f är inte linjär.

3 $f_B(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -24 \\ 19 \end{pmatrix}$, $f_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$, $f_B(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -32 \\ 10 \end{pmatrix}$ och $f_B(2\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -48 \\ 38 \end{pmatrix}$

4 $f_D(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 39 \end{pmatrix}$, $f_D(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -25 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix}$, $f_D(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ och $f_D(2\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 78 \end{pmatrix}$