Veckoblad 3, Linjär algebra IT, VT2010

Vi inleder den tredje veckan med att gå igenom begreppen determinant och invers matris som vi inte hann med i vecka 2, se veckoblad 2 för övningar etc på dessa avsnitt. Därefter ska vi ge oss i kast med linjära avbildningar på allvar på föreläsningarna och även tisdagens gruppövning kommer att handla om linjära avbildningar. På måndagens övning kommer vi att räkna uppgifter om plan och avstånd ifrån avsnitt 1.6 samt uppgifter ifrån veckoblad 2.

De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten under veckan, undantaget de i avsnitt 2.2 och 2.3 som fanns på veckoblad 2, är följande:

- Bassatsen och ekvivalensen mellan begreppen matrisavbildning och linjär avbildning.
- Linjär avbildning avbildar parallella linjer på parallella linjer.
- Ortogonal projektion och rotation är linjära avbidlningar.
- Sammansättning av linjära avbildningar svarar mot matrismultiplikation.
- Inversen av en inverterbar linjär avbildning är också en linjär avbildning.
- Determinanten för 2×2-matris ger areaförändring och determinanten för 3×3-matris ger volymförändring för en linjär avbildning.

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Bestämma matrisen för en linjär avbildning med hjälp av bassatsen.
- Bestämma matrisen för sammansättningen av flera linjära avbildningar.
- Bestämma matrisen för inversen till en linjär avbildningr.
- Beräkna arean (volymen) av ett område som är bilden av ett enklare område via en linjär avbildning.

Övningsuppgifter

Avsnitt 3.3

1.$^\bullet$() Låt f vara en linjär avbildning i rummet som avbildar de tre standardbasvektorerna som

$$f(\mathbf{e}_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \; f(\mathbf{e}_y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ och } f(\mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen A som är sådan att $f = f_A$, d v s matrisavbildningen m a p A.

2.$^\bullet$() Låt f vara en linjär avbildning i planet som uppfyller

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ och } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen A som är sådan att $f = f_A$, d v s matrisavbildningen m a p A.

3.$^\bullet$() Låt f vara en linjär avbildning i rummet som uppfyller

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} 4, \; f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ och } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen A som är sådan att $f = f_A$.

Avsnitt 3.4

4.$^\bullet$(L) Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i planet som ges av spegling i linjen $y = kx$, där $k \in \mathbb{R}$.

5.$^\bullet$() Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i rummet som ges av ortogonal projektion på xz-planet.

6.$^\bullet$() Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i rummet som ges av spegling i yz-planet.

7.$^\bullet$() Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i rummet som ges av rotation kring y-axeln vinkeln β i den riktning som överför den positiva x-axeln på den positiva z-axeln då $\beta = \pi/2$.

8.$^\bullet$() Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i rummet som ges av rotation kring x-axeln vinkeln β i den riktning som överför den positiva z-axeln på den positiva y-axeln då $\beta = \pi/2$.

9.$^\bullet$() Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i rummet som ges av spegling i planet $x = y$.

10.$^\bullet$() Visa att ortogonal projektion på ett plan (genom origo) är en linjär avbildning.

Avsnitt 3.5

11.•(L) Vad är matrisen för den linjära avbildning i planet som består av en rotation $\pi/3$ radianer moturs runt origo följt av spegling i linjen $y = x$?

12.•(L) Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning i planet som består av att första spegla i linjen $y = x$ och sedan projicera ortogonalt på x-axeln.

13.•(L) Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i planet som består av ortogonal projektion på linjen $y = 2x$ följt av rotation kring origo 45 grader **medurs**.

14.•(L) Beräkna matrisen för den linjära avbildning som är ortogonal projektion av planet på xy-planet följt av rotation $\pi/2$ radianer runt x-axeln i den riktning som överför positiva delen av y-axeln på positiva delen av z-axeln.

15.•(L) Låt A vara matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen som består av rotation $\frac{\pi}{4}$ radianer kring y-axeln i den riktning som bestäms av att positiva x-axeln vrids mot positiva z-axeln. Låt B vara matrisen för spegling i yz-planet. Beräkna matrisen för den linjära avbildning som först roterar enligt A och sedan speglar enligt B.

16.•(L) Beräkna matrisen för den linjära avbildning i planet som är rotation $\pi/2$ radianer runt x-axeln i den riktning som överför positiva delen av y-axeln på positiva delen av z-axeln följt av ortogonal projektion av planet på xy-planet.

17.•(L) Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar vektorn

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ och vektorn } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

18. (L) Denna uppgift handlar om affina avbildningar, se första gruppövningen för lite teori om dessa.

a.•() Bestäm matrisen för den linjära avbildning som projicerar ortogonalt på linjen $y = 3x$.

b.•() Bestäm en matris A och en vektor $\mathbf{b}$ så att den affina avbildning f som är projektion ortogonalt på linjen $y = 3x + 1$ ges av

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Avsnitt 3.6

19. () Låt $P = (1, 2)$, $Q = (3, 4)$ och $R = (-1, 6)$.

a.•() Vad är arean av triangeln $\triangle PQR$?

b.•() Låt f vara den linjära avbildningen med matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vad är arean av bilden, $f(\triangle PQR)$, av triangeln $\triangle PQR$?

20. () Låt K vara ett klot med radien r.

a.$^\bullet$() Vad är volymen av K?

b.$^\bullet$() Låt f vara den linjära avbildningen med matrisen

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vad är volymen av bilden, $f(K)$, av K?

21. () Låt $P = (1, 2, 1)$, $Q = (3, 3, 2)$ och $R = (-1, 2, 0)$.

a.$^\bullet$() Vad är arean av triangeln $\triangle PQR$?

b.$^\bullet$() Låt f vara den linjära avbildningen med matrisen

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vad är arean av bilden, $f(\triangle PQR)$, av triangeln $\triangle PQR$?

Facit

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (Tips: Utnyttja att f är linjär för att räkna ut vad $f(\mathbf{e}_x)$ är.)

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 10 & -5 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ (Tips: Utnyttja att f är linjär för att räkna ut vad $f(\mathbf{e}_x)$, $f(\mathbf{e}_y)$ och $f(\mathbf{e}_z)$ är.)

4. $\dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Tips: Proposition 1.22 kan vara till (stor) hjälp.

11. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$

18. a. $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

b. $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \dfrac{1}{10}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

19. a. 6 (Tänk halv parallellogram.)

b. 120

20. a. $\frac{4\pi r^3}{3}$

b. $104\pi r^3$

21. a. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (Tänk halv parallellogram.)

b. $\frac{3\sqrt{274}}{2}$ (Observera att det *inte* går att använda satserna om area och volymförändring eftersom det handlar om en area i rummet. Areaförändringen i rummet varierar för olika plan i rummet.)