Veckoblad 4, Linjär algebra IT, VT2010

Under den fjärde veckan ska vi under måndagens föreläsning se hur man generaliserar vektorer i planet och rummet till vektorer med godtycklig dimension. Vi kommer också att generalisera begrepp och resultat för matriser och linjära avbildningar till godtycklig storlek. Detta kommer inte att innebära några nya begrepp, även om startpunkten är en annan då man direkt utgår ifrån den algebraiska representationen av vektorer med koordinater. På torsdagen kommer vi att gå igenom linjära ekvationssystem och bl a ge en allmän metod för att bestämma alla lösningar.

De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten under veckan är följande:

- Begreppet n-vektor och rummet av alla dessa som betecknas $\mathbb{R}^n$.
- Operationer för n-vektorer samt räknereglerna för dessa.
- Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
- Standardbasen för $\mathbb{R}^n$.
- Linjärkombinationer av och spannet av vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- Matriser av godtycklig storlek.
- Matrisoperationer samt räkneregler för dessa.
- Representationen av skalärprodukt som en matrisprodukt.
- Begreppen identitetsmatris och invers till en matris.
- Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.
- Bassatsen för linjära avbildningar.
- Begreppet linjär ekvation.
- Skriva ett linjärt ekvationssystem på matrisform.
- Elementära radoperationer.
- Begreppen totalmatris, trappstegsform, pivotelement, pivotkolumn och fri kolumn.
- Gausselimination och bakåtsubstitution.
- Normalekvationen och minstakvadratlösningen för ett överbestämt linjärt ekvationssystem.

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Addera vektorer i $\mathbb{R}^n$ och multplicera dem med tal.
- Beräkna skalärprodukten mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- Beräkna längden av vektor i $\mathbb{R}^n$.
- Beräkna vinkeln mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- Beräkna spannet av en mängd vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- Multiplicera en matris med en vektor.
- Avgöra när man kan multiplicera två matriser och räkna ut produkten.
- Lösa enkla matrisekvationer med hjälp av matrisalgebra.
- Tolka lösningar till ett ekvationssystem geometriskt.
- Skriva ett linjärt ekvationssystem på matrisform.
- Bestämma alla lösningar till ett linjärt ekvationssystem.
- Analysera existens av lösningar och bestämma dessa för ett linjärt ekvationssystem med parametrar.
- Bestämma en minstakvadratlösning till ett överbestämt linjärt ekvationssystem.
- Bestämma bästa anpassning i minstakvadratmening av mätdata till en given formel.

Övningsuppgifter

Avsnitt 4.1

1. () Vi definierar följande vektorer i $\mathbb{R}^5$:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna följande:

a.$^\bullet$() $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

b.$^\bullet$() $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$

c.$^\bullet$() $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

d.$^\bullet$() $\|\mathbf{u}\|$

e.$^\bullet$() Vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

f.$^\bullet$() $\mathbf{u}$ som en linjärkombination av basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_5$

g.$^\bullet$() $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u})$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

2. () Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två ortogonala n-vektorer som båda är skilda ifrån nollvektorn. Visa att matriserna $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^t$ och $B = \mathbf{v}\mathbf{v}^t$ är nollskilda *symmetriska* $n \times n$-matriser sådana att $AB = BA = 0$, d v s lika med nollmatrisen.

3. **(L*)** Antag att vi har en följd av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Vi definierar en ny följd av vektorer rekursivt enligt:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_i|^2} \mathbf{u}_i, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

a. **(L)** Visa att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala.

b. **(L)** Visa att för alla $i \neq j$ med $1 \leq i, j \leq n$ gäller att $\mathbf{u}_i$ och $\mathbf{u}_j$ är ortogonala.

4.$^\bullet$**(*)** Visa att $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$. (Denna olikhet kallas för Cauchy-Schwartz olikhet och motiverar bl a att den defintion av vinkeln som gavs i definition 4.3 är meningsfull, eftersom kvoten som ska vara cosinus för vinkeln därmed alltid hamnar i intervallet från -1 till 1.)

Avsnitt 4.2

5.$^\bullet$() Bestäm alla möjliga produkter, d v s alla som är definierade, av par bland följande matriser och vektorer:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; \text{och} \; W = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (L*) Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $\mathbf{x}$ vara en vektor sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa att om A är symmetrisk så är $\mathbf{x}$ ortogonal mot alla kolumnvektorerna i A.

7.$^\bullet$(L) Låt C och D vara två stycken $m \times n$-matriser, A en inverterbar $m \times m$-matris och B en inverterbar $n \times n$-matris. Visa att det i så fall finns en unik $m \times n$-matris X som löser matrisekvationen $AXB + C = D$ och ange en formel för X.

Avsnitt 4.3

8. () Låt $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med matris

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a.$^\bullet$() Vad är m och n?
b.$^\bullet$() Vad är $f(\mathbf{e}_1)$ och $f(\mathbf{e}_3)$?
c.$^\bullet$() Vad är $f(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_3)$?

9. (*) Visa att matrisen för speglingen i en linje L med riktingsvektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av

$$A = \frac{2}{\|\mathbf{v}\|^2}(\mathbf{v}\mathbf{v}^t) - I.$$

Tips: Utnyttja exempel 4.31 och att speglingen satisfierar $\mathbf{x}_S = 2\mathbf{x}_L - \mathbf{x}$.

Avsnitt 5.1-5.2

10.$^\bullet$() Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{x}{s_1}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{x}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{s_2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

med r_1, r_2, s_1, s_2 positiva konstanter. Tolka detta geometriskt och ange hur många lösningar det kan finnas beroende på värdet på konstanterna. Ange villkor på konstanterna för att de olika fallen ska inträffa.

11.$^\bullet$(L) Bestäm ekvationen på parameterform för linjen som utgör skärningen av de två planen

$$x + 2y + 2z = 5 \text{ och } 2x - y + 2z = 2.$$

12.$^\bullet$() Skriv ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

som en matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Avsnitt 5.3-5.4

13. () Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för följande par av (trappstegs)matris A och (högerleds)vektor $\mathbf{b}$.

a.$^\bullet$() $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b.$^\bullet$() $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

c.$^\bullet$() $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d.$^\bullet$() $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

e.$^\bullet$() $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

14.$^\bullet$**(L)** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

med hjälp av Gausselimination.

15.$^\bullet$**(L)** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 5z = 9 \\ 3x + 12y + 3z = 18 \end{cases}$$

med hjälp av Gausselimination.

16.$^\bullet$**(L)** Motivera att alla lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

utgör ett plan i $\mathbb{R}^5$ och bestäm en ekvation på parameterform för detta plan.

17. **(L)** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

a.$^\bullet$**(L)** Ange två ickeparallella och nollskilda vektorer $\mathbf{b}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning.

b.$^\bullet$**(L)** Ange om det är möjligt en vektor $\mathbf{c}$ sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ saknar lösning. Om det inte är möjligt så motivera varför.

18.$^\bullet$**(L)** För vilka a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + az = 4 \\ 2x + ay + az = 2 \end{cases}$$

ej unik lösning. Bestäm alla lösningar i de fall då det inte finns unik lösning.

19.$^\bullet$**(L)** För vilka värden på a saknar följande ekvationssystem lösning?

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + az = 7 \end{cases}$$

20.$^\bullet$**(L)** För vilka par (a, b) har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (a - b)y - z = 2 \\ 2x + 4y + (b + 1)z = a - 2 \end{cases}$$

oändligt många lösningar?

Avsnitt 5.5

21.$^\bullet$**(L)** Bestäm den linje $y = kx + m$ som bäst (i minstakvadratmening) approximerar följande mätdata

x	0	1	2	3	4
y	4	7	9	10	12

.

22.$^\bullet$**(L)** Bestäm det andragradspolynom $y = a + bx + cx^2$ som bäst (i minstakvadratmening) approximerar följande mätdata

x	0	1	2	3	4
y	3	6	8	7	4

.

Facit

1. a. $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 26 \\ 22 \\ 5 \end{pmatrix}$

c. -14

d. $\sqrt{66}$

e. $\arccos \frac{-7}{3\sqrt{55}}$

f. $\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4 + 3\mathbf{e}_5$

g. 52 (båda två)

4. Tips: Utnyttja att $0 \leq \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2$ för alla tal t och sätt $t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|^2$.

5. $XY = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$, $YZ = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 18 & -3 & 9 \\ 8 & -6 & 12 & -2 & 6 \\ -24 & 18 & -36 & 6 & -18 \\ 28 & -21 & 42 & -7 & 21 \\ -16 & 12 & -24 & 4 & -12 \end{pmatrix}$, $ZY = -49$ och $WX = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 & 8 & -8 \\ -11 & -4 & 6 & 9 & -11 \\ -14 & -4 & 8 & 10 & -14 \end{pmatrix}$

7. $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$

8. $m = 5$ och $n = 3$

8. $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $nf(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -7 \\ -23 \\ -5 \end{pmatrix}$

10. Det är två ellipser med centrum i origo och lösningar till systemet är skärningspunkter mellan de två ellipserna. Antalet lösningar ges av

$$\begin{cases} \text{oändligt många,} & \text{om } r_1 = r_2,\ s_1 = s_2 \\ 2, & \text{om } r_1 = r_2,\ s_1 \neq s_2 \ \text{ eller } \ r_1 \neq r_2,\ s_1 = s_2 \\ 4, & \text{om } r_1 < r_2,\ s_1 > s_2 \ \text{ eller } \ r_1 > r_2,\ s_1 < s_2 \\ 0, & \text{om } r_1 < r_2,\ s_1 < s_2 \ \text{ eller } \ r_1 > r_2,\ s_1 > s_2 \end{cases}$$

11. T ex $\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2t \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och $\mathbf{b} = 342$

13. **a.** $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. Lösning saknas

d. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e. Lösning saknas

14. $z = -10/9$, $y = 4/9$ och $x = 1$

15. z fri, $y = (1 + z)/2$ och $x = 4 - 3z$

16. $\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 13/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. **a.** Man kan t ex ta vilka två kolumner som helst i A.

b. T ex $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Alla vektorer som inte är en linjärkombination av (två av) kolumnerna i A.)

18. $a = \pm 2$. I dessa fall saknas lösning.

19. Inga.

20. $(2, 5)$ och $(4, 4)$

21. $y = \frac{19}{10}x + \frac{23}{5}$

22. $y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2$