Veckoblad 5, Linjär algebra IT, VT2010

Under den femte veckan ska vi under måndagens föreläsning ge definitionen av determinant för godtyckliga kvadratiska matriser och också visa att man kan använda elementära radoperationer för att beräkna determinanten. Vi kommer också kort att prata om konstruktionen av determinant. Därefter kommer vi att tala om begreppen linjärt oberoende och baser och speciellt kommer vi att titta på baser för $\mathbb{R}^n$ och se hur koordinaterna i olika baser är relaterade. På torsdagen kommer vi att se hur man kan använda olika baser i samband med linjära avbildningar och sedan titta på ON-baser och de nära relaterade ON-matriserna. Till slut ska vi också ta en första titt på begreppen egenvärden och egenvektorer genom att vi går igenom definitionen och tittar på några enkla exempel.

De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten under veckan är följande:

- Definitionen av determinant av en kvadratisk matris.
- Hur elementära radoperationer ändrar determinanten.
- Att determinanten av en triangulär matris är produkten av elementen på diagonalen.
- Begreppet linjärt (o)beroende vektorer.
- En mängd vektorer är linjärt beroende om och endast om någon av dem kan skrivas som linjärkombination av de andra.
- Begreppet bas för en mängd vektorer.
- En mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om de är n stycken och linjärt oberoende.
- Relationen mellan koordinaterna i olika baser för $\mathbb{R}^n$.
- Matrisen för en linjär avbildning relativt godtyckliga baser.
- Relationen mellan matriserna för en linjär avbildning relativt olika baser.
- Begreppet ON-bas.
- De relaterade begreppen isometrisk avbildning och ON-matris.
- Inversen av en ON-matris är dess transponat.
- Begreppen egenvärde och egenvektor

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Beräkna determinanten med hjälp av elementära radoperationer.
- Beräkna determinanten med hjälp av räknereglerna för determinant.
- Avgöra om en mängd vektorer är linjärt oberoende.
- Avgöra om en mängd vektorer utgör en bas.
- Utvidga en mängd vektorer till en bas.
- Bestämma koordinaterna för en vektor i en godtycklig bas.
- Bestämma matrisen för en linjär avbildning m a p en godtycklig bas.
- Beräkna matrisen för en linjär avbildning i standardbasen via dess matris i en annan bas.
- Avgöra om en mängd är en ON-bas.
- Utvidga en mängd av ortonormala vektorer till en ON-bas.
- Bestämma egenvärden och egenvektorer geometriskt för matriser som svarar mot linjära avbildningar med enkel geometrisk tolkning.
- Bestämma egenvärden och egenvektorer för potenser av en matris för vilken egenvärden och egenvektorer är kända.

Övningsuppgifter

Kapitel 6

1.$^{\bullet}$() Antag att $\det X = 7$ för

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna determinanten av följande matriser

a) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2x_1 + y_1 & 2x_2 + y_2 & 2x_3 + y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2y_1 - z_1 & 2y_2 - z_2 & 2y_3 - z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$

2.•() Beräkna determinanten av följande matriser.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & 26 & 0 \end{pmatrix}$

3. (L*) Låt x vara ett godtyckligt reellt tal. Vi definierar A som den $n \times n$-matris som har elementen $a_{ij} = (x + i + j - 2)^2$.

a) Visa att $\det(A) = -8$ om $n = 3$ oavsett vad x är.

b) Visa att $\det(A) = 0$ om $n \geq 4$ oavsett vad x är.

Avsnitt 7.1

4.•(L) Är de tre vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linjärt oberoende? Utgör de en bas för $\mathbb{R}^3$? Motivering krävs.

5.•(L) Är de tre vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linjärt oberoende? Utgör de en bas för $\mathbb{R}^3$? Motivering krävs.

6.$^\bullet$(L) Bestäm alla värden på a för vilka de tre vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende.

7.$^\bullet$() Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm en vektor $\mathbf{v}_3$ sådan att $\mathbf{v}_3$ inte är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

b) Bestäm en vektor $\mathbf{v}_4$ sådan att $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Motiveringar krävs.

Avsnitt 7.2

8.$^\bullet$() Vi har baserna $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (standardbasen), $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ och $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ för $\mathbb{R}^2$ där

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Motivera att F och G är baser för $\mathbb{R}^2$.

b) Beräkna $\mathbf{x}_F$ och $\mathbf{x}_G$ för vektorn med $\mathbf{x} = \mathbf{x}_E = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Beräkna $\mathbf{x}_E$ och $\mathbf{x}_G$ för vektorn med $\mathbf{x}_F = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

d) Beräkna $\mathbf{x}_E$ och $\mathbf{x}_F$ för vektorn med $\mathbf{x}_G = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

9.$^\bullet$(L) En vektor $\mathbf{x}$ har koordinaterna $(1, 1, 1)$ i standardbasen. Bestäm dess koordinater i den högerorienterade ON-basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ där

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$$

(uttryckt i standardbasen). Kontrollera också att du fått rätt svar (kontrollen ska redovisas och motiveras).

Avsnitt 7.3och 7.4

10.$^\bullet$(L) Visa att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}$$

utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.

11.•() Låt
$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Låt g vara ortogonal projektion på linjen som har $\mathbf{f}_2$ som riktningsvektor.

a) Bestäm matrisen för g med avseende på basen F.

b) Bestäm matrisen för g med avseende på standardbasen.

12.•(L) Vi definierar tre ortogonala vektorer
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Sätt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{|\mathbf{v}_2|}\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{|\mathbf{v}_3|}\mathbf{v}_3$ så att $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ är en ON-bas.

a) Bestäm matrisen i basen F för den linjära avbildning som ges av en rotation $\pi/4$ radianer kring linjen genom origo som är parallell med $\mathbf{f}_3$. Riktningen är sådan att $\mathbf{f}_1$ roteras halvvägs bort till riktningen för $\mathbf{f}_2$.

b) En vektor har koordinaterna $(1\ 2\ 3)^t$ i basen $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Vad har den för koordinater i standardbasen?

13.•(L) Betrakta ON-basen $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)$, där
$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}.$$
Låt L vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion på planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

a) Bestäm matrisen för L i basen F.

b) Bestäm matrisen för L i standardbasen.

14.•(L) Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen i $\mathbb{R}^3$ som svarar mot spegling i planet $x + y + 2z = 0$.

15.•(L)

a) Beräkna vinkeln mellan
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ange om det är möjligt vinkeln exakt i radianer eller grader.

b) Bestäm en vektor $\mathbf{v}_3$ sådan att den tillsammans med $\mathbf{v}_2$ utgör en ON-bas för planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

c) Bestäm en vektor $\mathbf{v}_4$ sådan att $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.

Avsnitt 8.1

16.$^\bullet$() Låt A vara en inverterbar 2×2-matris med egenvärdet $\lambda_1 = 2$ med egenvektor $\mathbf{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)$ och egenvärdet $\lambda_2 = -1$ med egenvecktor $\mathbf{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}\right)$.

a) Ange två (ickeparallella) enhetsvektorer som är egenvektorer till A.

b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A^2.

c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A^5.

d) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A^{-1}.

17.$^\bullet$(L) Låt S vara den matris som svarar mot den linjära avbildning i rummet som ges av ortogonal projektion på planet $z = 0$. Ge alla egenvärden och egenvektorer till S. Ditt svar ska motiveras.

18.$^\bullet$(L) Låt S vara den matris som svarar mot den linjära avbildning i rummet som ges av spegling i planet $z = 0$. Ge alla egenvärden och egenvektorer till S. Ditt svar ska motiveras.

19.$^\bullet$(L) Låt A vara matrisen för den linjära avbildning i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal projektion på det plan genom origo som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

a) Vad har A för egenvärden?

b) Ge tre linjärt oberoende egenvektorer till A.

Svaren ska motiveras.

20.$^\bullet$(L*) Vi säger att $n \times n$-matrisen A är konjugerad med $n \times n$-matrisen B om och endast om det finns en inverterbar matris P sådan att

$$A = PBP^{-1}.$$

Detta ger en relation på mängden av alla $n \times n$-matriser.

a) Visa att relationen ‘konjugerad med’ är en ekvivalensrelation på mängden av alla $n \times n$-matriser.

b) Visa att två matriser som är konjugerade med varandra har samma egenvärden.

21.$^\bullet$(L) Låt F vara ON-basen som består av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Låt f vara den linjära avbildningen i rummet som består av ortogonal projektion på planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Beteckna matrisen för f (i standardbasen) med A.

a) Bestäm matrisen A:s samtliga egenvärden och egenvektorer.

b) Bestäm matrisen A, d v s matrisen för f i standardbasen.

Facit

1.

a) 14

b) -7

c) 7

d) 0

e) 7

f) -14

2.

a) 38

b) 0

4. Ja de är linjärt oberoende, kolla t ex att determinanten av en viss matris är nollskild. Eftersom det är 3 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ så utgör de en bas för $\mathbb{R}^3$.

5. Nej de är linjärt beroende, kolla t ex att determinanten av en viss matris är noll. Därmed är de inte en bas för $\mathbb{R}^3$.

6. -5 och 3.

7.

a) Man kan ta vilken vektor $\mathbf{v}_3$ som helst som är sådan att $\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ saknar lösning. (Om du tar en vektor på "måfå" är chansen stor att så är fallet.) Ett helt säkert alternativ är $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ som ju är ortogonal mot både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

b) Man kan ta $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3$, eftersom $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ inte är parallella och $\mathbf{v}_3$ inte linjärkombination av dessa så $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ är linjärt oberoende och därmed en bas för $\mathbb{R}^3$.

8.

a) De två paren av vektorer är inte parallella och därmed linjärt oberoende och utgör därför baser för $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathbf{x}_F = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{31}{3} \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}_F = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}_F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

10. Kolla att de alla är parvis ortogonala och har längd 1.

11.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1+30+9 \\ 3+14-9 \\ 3-24+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}$

13.

a) $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -12 & 45 & 6 \\ 18 & 6 & 40 \end{pmatrix}$

14. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

15.

a) $\alpha = \pi/3$ radianer

b) $\mathbf{v}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

16.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

b) 4 med $\mathbf{v}_1$ och 1 med $\mathbf{v}_2$

c) 32 med $\mathbf{v}_1$ och -1 med $\mathbf{v}_2$

d) $\frac{1}{2}$ med $\mathbf{v}_1$ och -1 med $\mathbf{v}_2$

17. Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$ är egenvektorer med egenvärdet 0. Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ är egenvektorer med egenvärdet 1.

18. Alla vektorer som är parallella med planet d v s vektorer på formen $\begin{pmatrix}x & y & 0\end{pmatrix}^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1. Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $\begin{pmatrix}0 & 0 & z\end{pmatrix}^t$, har spegelbild den vektor som är lika lång och pekar i precis motsatt riktning. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet -1.

19. Alla vektorer i planet har egenvärdet 1 och alla vektorer vinkelräta mot planet har egenvärdet 0.

21.

a) Alla vektorer i planet, d v s alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, är egenvektorer med egenvärdet 1. Vektorer som är ortogonala mot planet, d v s multiplar av $\mathbf{v}_3$, är egenvektorer med egenvärdet 0.

b) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & 2 & -2\\2 & 5 & 4\\-2 & 4 & 5\end{pmatrix}$